

Chapitre 10

Calcul intégral

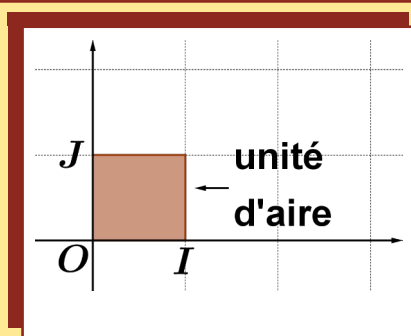
I. Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 1

Soit $(O; I, J)$ un repère orthogonal.

On appelle **unité d'aire** l'aire du rectangle construit à l'aide des points O , I et J .

On la note **u.a.**.



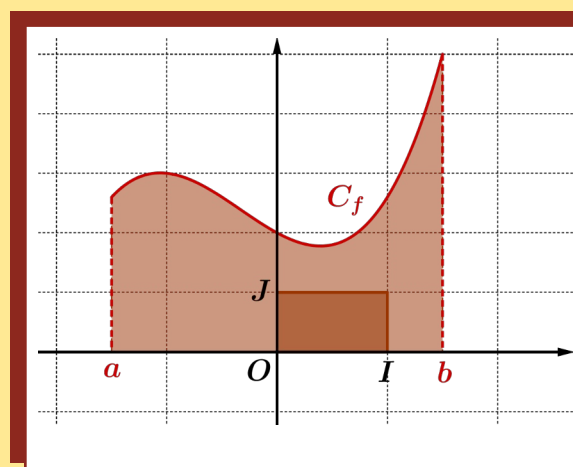
Définition 2

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ (avec $a \leq b$) et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$. On appelle :

- **Domaine sous la courbe** le domaine délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$. Ce domaine est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :
 $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$

- **Intégrale de f sur $[a; b]$** la mesure de l'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous la courbe.

On la note $\int_a^b f(x) dx$.



Remarques

- $\int_a^b f(x) dx$ se lit « intégrale de a à b de $f(x) dx$ » ou encore « intégrale pour x allant de a à b de f ». Elle se lit parfois « somme de a à b de $f(x) dx$ » car la notion d'intégrale vient en réalité de sommes (de rectangles).
- Les nombres a et b sont appelés respectivement bornes inférieure et supérieure de l'intégrale.
- Le x de dx est la variable par rapport à laquelle on effectue les calculs. Cette variable est une variable muette, c'est à dire qu'elle n'est plus présente lorsque le calcul est effectué.
- La variable x peut être remplacée par n'importe quelle lettre (à l'exception de a et b) dans l'écriture de l'intégrale : $\int_a^b f(t) dt$, $\int_a^b f(u) du$, etc...

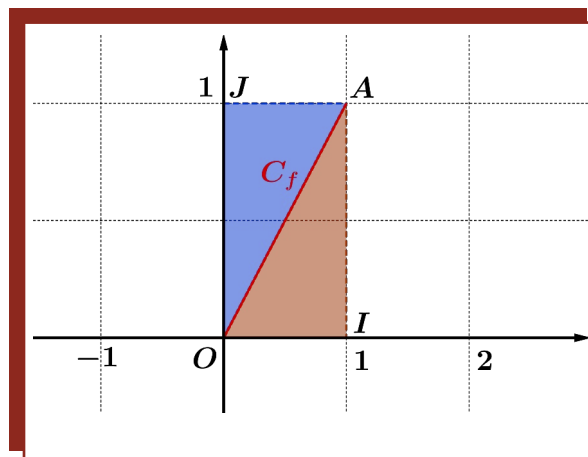
Exemples

- Calculons $\int_0^1 x \, dx$.

La fonction $x \rightarrow x$ est continue et positive sur l'intervalle $[0; 1]$.

$\int_0^1 x \, dx$ est l'aire du triangle OIA ci-contre.

$$\text{Donc } \int_0^1 x \, dx = \frac{OI \times IA}{2} = \frac{1}{2} \text{ u.a. .}$$



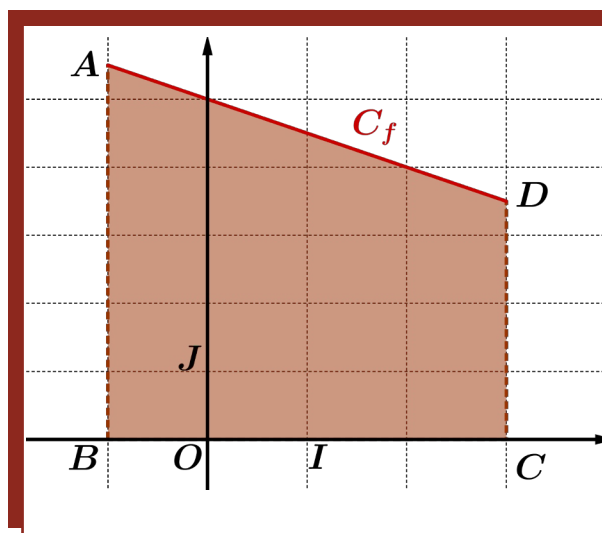
- Calculons $\int_{-1}^3 \left(-\frac{1}{2}x + 5\right) dx$.

La fonction $x \rightarrow -\frac{1}{2}x + 5$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1; 3]$.

$\int_{-1}^3 \left(-\frac{1}{2}x + 5\right) dx$ est l'aire du trapèze

ABCD ci-contre.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \left(-\frac{1}{2}x + 5\right) dx &= \frac{(AB + CD) \times BC}{2} \\ &= \frac{(5,5 + 3,5) \times 4}{2} \\ &= 18 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

**Remarques**

- On peut déterminer l'aire en fonction d'une unité bien précise. Par exemple, dans le premier exemple, si l'on choisit comme unité $OI = 2 \text{ cm}$ et $OJ = 3 \text{ cm}$, on peut déterminer l'aire en cm^2 .

Une unité d'aire mesure $2 \times 3 = 6 \text{ cm}^2$ et alors on aura $\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ et donc une aire sous la courbe égale à 3 cm^2 .

- Pour le deuxième exemple, on aurait pu décomposer l'aire du trapèze en un rectangle plus un triangle rectangle.

• On a donné jusqu'ici une définition géométrique de l'intégrale. On peut aussi donner une définition cinématique de l'intégrale. Pour un mobile se déplaçant sur une trajectoire à la vitesse $v(t)$ positive ou nulle, la distance d parcourue par le mobile entre les instants t_1 et t_2 s'exprime par : $d = \int_a^b v(t) dt$.

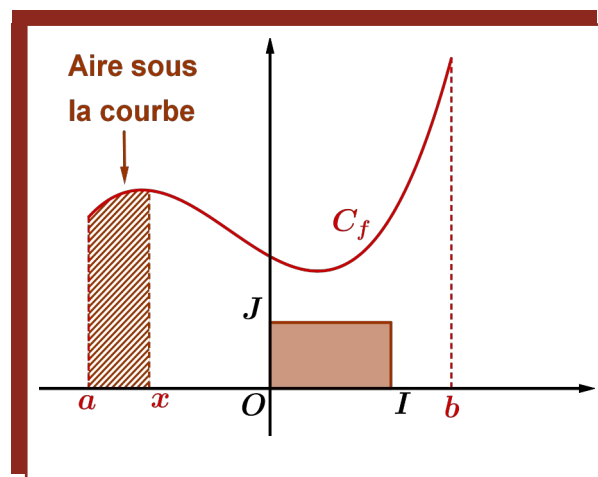
II. Primitive d'une fonction continue

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$.
 Pour tout réel x de l'intervalle $[a; b]$, l'intégrale de f entre a et x est égale à l'aire sous la courbe C_f sur l'intervalle $[a; x]$. On définit ainsi une fonction F qui à tout réel x de $[a; b]$ associe l'intégrale de f entre a et x :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Remarque

$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ puisque l'aire sous la courbe C_f , réduite à un segment, est nulle.



II.1 Théorème fondamental

Théorème 3 (Théorème fondamental)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. La fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f . Ainsi $F' = f$.
 La fonction F est la primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a .

Démonstration

On se place dans le cas où f est croissante sur $[a; b]$ et on admet ce théorème dans le cas général. On revient à la définition de la dérivée, il faut montrer que si $x_0 \in [a; b]$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

• Si $h > 0$

On a $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$ par soustraction d'aire.

On sait que f est croissante sur $[a; b]$, donc si $t \in [x_0; x_0 + h]$, alors $f(x_0) \leq f(t) \leq f(x_0 + h)$.

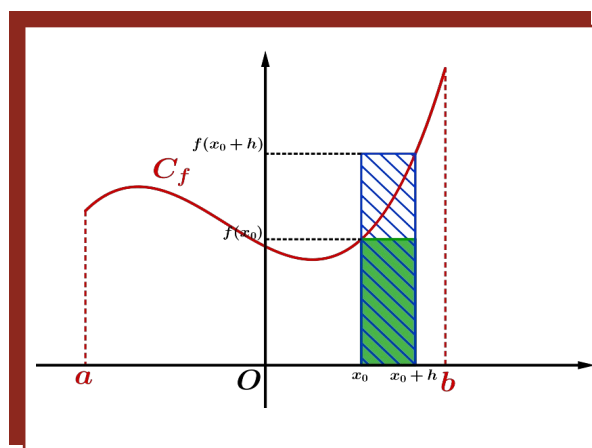
On en déduit, en encadrant l'aire sous la courbe entre l'aire du domaine vert et l'aire du domaine bleu hachuré :

$$\begin{aligned} h \times f(x_0) &\leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \leq h \times f(x_0 + h) \\ f(x_0) &\leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt}{h} \leq f(x_0 + h) \\ f(x_0) &\leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h) \end{aligned}$$

• Si $h < 0$

on montre de même que :

$$f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$



- Conclusion : La continuité de f permet d'écrire que $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$.

Ainsi, la fonction F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Puisque x_0 a été choisi arbitrairement dans $[a; b]$, alors F est dérivable sur $[a; b]$ et $F' = f$.

II.2 Ensemble des primitives d'une fonction continue

Définition 4

Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur l'intervalle I telle que :

$$\text{Pour tout réel } x \in I, F'(x) = f(x)$$

Remarques

- D'après la définition, une primitive est toujours dérivable et donc continue.
- Intégrer revient à chercher une primitive. C'est l'opération réciproque de la dérivation.

Exemples

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$.

La fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $F(x) = x^2$ est une primitive de f .

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2x$.

- Montrons que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x(\ln(x) - 1)$ est une primitive de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$.

La fonction F est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que composée de telles fonctions sur $]0; +\infty[$.

On a $F'(x) = \ln(x) - 1 + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) = f(x)$. F est donc une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Théorème 5

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Démonstration

On se place dans le cas où f est continue sur un intervalle fermé $[a; b]$ et on admettra ce théorème dans le cas général.

On admet le résultat suivant : toute fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ admet un minimum et un maximum sur $[a; b]$. On appelle m le minimum de f .

On considère la fonction g telle que $g(x) = f(x) - m$.

La fonction g est continue en tant que somme de telles fonctions sur $[a; b]$.

Elle est de plus positive sur $[a; b]$ car pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \geq m$.

D'après le théorème fondamental, la fonction G définie ci-dessous est une primitive de g sur $[a; b]$:

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt$$

La fonction F définie sur $[a; b]$ par : $F(x) = G(x) + mx$ est alors une primitive de f car :

$$F'(x) = G'(x) + m = g(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$$

III. Intégrale d'une fonction continue

III.1 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

On étend la validité du théorème fondamental aux fonctions continues de signes quelconques.

Théorème 6

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , F une primitive de f et a et b deux réels de I . L'intégrale de f entre a et b est définie par :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration

Soit une fonction f continue sur un intervalle I . Alors f admet une primitive G sur I qui s'annule en a . Pour tout $(a; b) \in I^2$, $G(x) = \int_a^x f(t) dt$. Pour $x = b$, on a alors $G(b) = \int_a^b f(x) dx$. Soit F une primitive quelconque de f sur I . Alors il existe un réel k tel que $F(x) = G(x) + k$. On obtient alors $F(a) = G(a) + k = k$. D'où $G(b) = F(b) - k = F(b) - F(a)$.

Ainsi $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Remarque

On peut noter que le calcul de l'intégrale ne dépend pas du choix de la primitive.

Exemples

- Calculons l'intégrale suivante : $\int_{-1}^3 (x^2 - 3x + 5) dx$.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 5$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet comme primitive la fonction F définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 5x$. Ainsi :

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 5x \right]_{-1}^3 = \left(\frac{3^3}{3} - \frac{3}{2} \times 3^2 + 5 \times 3 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{3}{2} \times (-1)^2 + 5 \times (-1) \right) = \frac{52}{3}$$

- Calculons l'intégrale suivante : $\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2} dx$.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x}{(x^2+1)^2}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de telles fonctions et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \frac{3}{2} \times 2x \times \frac{1}{(x^2+1)^2}$.

Elle est de la forme $k u'(v' \circ u)$ avec $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = \frac{1}{x}$, $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $k = \frac{3}{2}$.

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F définie par $F(x) = k v \circ u = \frac{3}{2} \times \frac{-1}{x^2+1} = -\frac{3}{2(x^2+1)}$.

Ainsi $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2} dx = \left[-\frac{3}{2(x^2+1)} \right]_0^2 = -\frac{3}{2(2^2+1)} - \left(-\frac{3}{2(0^2+1)} \right) = -\frac{3}{10} + \frac{3}{2} = \frac{6}{5}$.

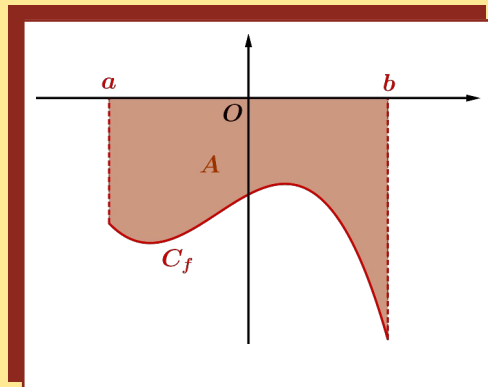
III.2 Intégrale et aire

Propriété 7

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle I et a et b deux réels de I .

On appelle intégrale de f sur $[a; b]$, et on note $\int_a^b f(x)dx$, l'opposé de l'aire A , en unités d'aire, délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

Ainsi $A = -\int_a^b f(x)dx$.

**Démonstration**

Soit f une fonction continue et négative sur $[a; b]$. Alors la fonction $-f$ est positive sur $[a; b]$. Par symétrie par l'axe des abscisses, les domaines sous les courbes C_f et C_{-f} sont les mêmes et ont donc la même aire. Notons A et A_{-f} ces domaines respectifs.

Ainsi $A = A_{-f} = \int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx$.

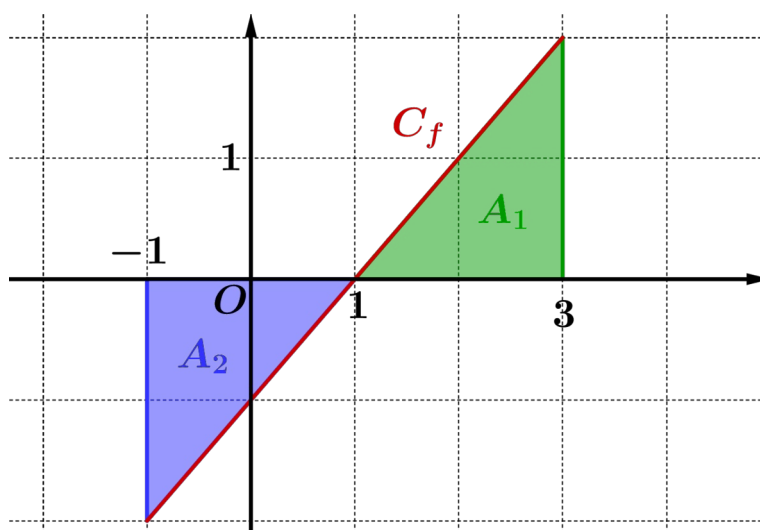
Remarque

Pour calculer $\int_a^b f(x)dx$ où f est de signe quelconque, cela revient à additionner les aires issues du découpage avec l'axe des abscisses en :

- comptant positivement les aires « au dessus de l'axe des abscisses ».
- comptant négativement les aires en « dessous de l'axe des abscisses ».

Exemple

Soit la fonction f définie sur $[-1; 3]$ et représentée par la courbe ci-dessous :

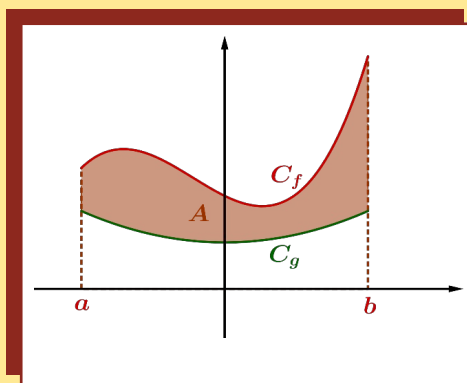


On calcule $\int_{-1}^3 f(x)dx$. Géométriquement, on obtient $\int_{-1}^3 f(x)dx = A_1 - A_2 = \frac{2 \times 2}{2} - \frac{2 \times 2}{2} = 0$.

Propriété 8

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ telles que $f(x) \geq g(x)$.
On appelle A l'aire comprise entre les deux courbes et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

Ainsi $A = \int_a^b (f - g)(x) dx$.

**Démonstration**

L'aire A se déduit de la différence entre les deux aires sous les courbes C_f et C_g (comptée négativement pour une fonction négative).

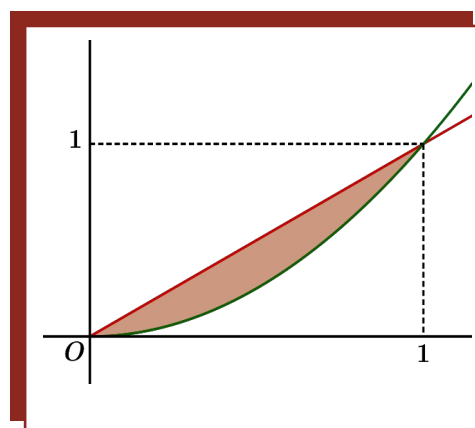
Ainsi $A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b (f - g)(x) dx$.

Exemple

Trouvons l'aire comprise entre la parabole d'équation $y=x^2$ et la droite $y=x$ entre les abscisses $x=0$ et $x=1$.

Pour tout $x \in [0; 1]$, $x \geq x^2$ donc la droite est au-dessus de la parabole.

Alors $A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

**III.2 Propriétés algébriques des intégrales****Propriété 9**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tout $a \in I$, $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I . Alors $\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$.

Propriété 10

Soit f une fonction continue sur I . Pour tout $(a; b) \in I^2$, $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I . Alors $\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x) dx$.

Propriété 11 (Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Pour tout réels a , b et c de I , $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Démonstration

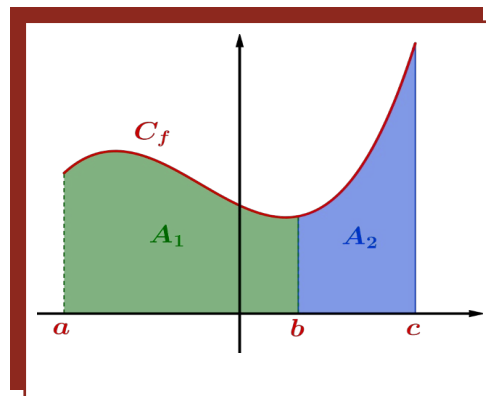
Soit F une primitive de f . Alors :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$$

Remarque

Dans le cas où f est positive et lorsque les réels a , b et c sont tels que $a \leq b \leq c$, la relation de Chasles traduit l'additivité des aires.

L'aire sous la courbe de C_f sur l'intervalle $[a; c]$ est égale à la somme des aires des domaines A_1 et A_2 représentées sur le graphique ci-contre.

**Exemple**

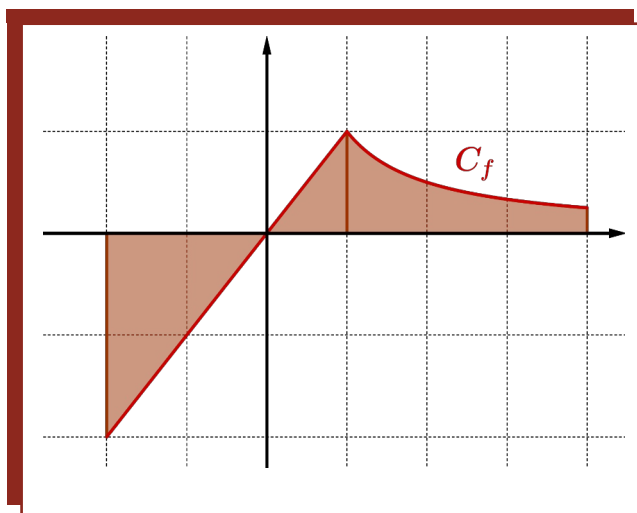
Soit la fonction f continue sur l'intervalle $[-2; 4]$ et définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{x} & \text{si } 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

On note C_f sa courbe représentative donnée ci-contre.

La relation de Chasles permet d'écrire :

$$\int_{-2}^4 f(x)dx = \int_{-2}^1 x dx + \int_1^4 \frac{1}{x} dx$$



• La fonction continue $x \rightarrow x$ admet comme primitive la fonction F_1 définie par $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$.

$$\text{Donc } \int_{-2}^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 = \frac{1}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = -\frac{3}{2}.$$

• La fonction continue $x \rightarrow \frac{1}{x}$ admet comme primitive la fonction F_2 définie par $F_2(x) = \ln(x)$.

$$\text{Donc } \int_1^4 \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^4 = \ln(4) - \ln(1) = \ln(4).$$

• Ainsi $\int_{-2}^4 f(x)dx = \int_{-2}^1 x dx + \int_1^4 \frac{1}{x} dx = -\frac{3}{2} + \ln(4)$.

Propriété 12 (Parité)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel.

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$.
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Remarques

- Si une fonction est paire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

- Si une fonction est impaire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$$

Propriété 13 (linéarité)

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a et b deux réels de I et α un réel.

Alors $\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ et $\int_a^b (\alpha f)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$.

Démonstration

- Soit F et G des primitives respectives de f et g . Alors $F+G$ est une primitive de $f+g$.

$$\text{Donc } \int_a^b (f+g)(x) dx = [F(x) + G(x)]_a^b = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Soit F une primitive de f . Alors αF est une primitive de αf .

$$\text{Donc } \int_a^b (\alpha f)(x) dx = [\alpha F(x)]_a^b = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha (F(b) - F(a)) = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

Exemples

$$\bullet \int_{-2}^e (2x+5) dx = \int_{-2}^e 2x dx + \int_{-2}^e 5 dx = [x^2]_{-2}^e + [5x]_{-2}^e = e^2 - (-2)^2 + 5e - 5 \times (-2) = e^2 + 5e + 6.$$

$$\bullet \text{ Soit } f \text{ et } g \text{ deux fonctions continues sur } [0;1] \text{ telles que } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \text{ et } \int_0^1 g(x) dx = \frac{7}{3}.$$

$$\text{Alors } \int_0^1 (3f-5g)(x) dx = 3 \int_0^1 f(x) dx - 5 \int_0^1 g(x) dx = 3 \times \frac{1}{2} - 5 \times \frac{7}{3} = -\frac{61}{6}.$$

III.3 Intégrale et inégalité**Propriété 14 (positivité)**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.

- Si f est positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- Si f est négative sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

Démonstration

- Si la fonction f est positive sur I , l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire sous la courbe et donc la quantité est positive.
- Si la fonction f est négative sur I , l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ représente l'opposé de l'aire sous la courbe et donc la quantité est négative.

Propriété 15 (intégration d'une inégalité)

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux réels de I tels que $a \leq b$. Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Démonstration

Soit f et g deux fonctions continues telles que pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \geq g(x)$.

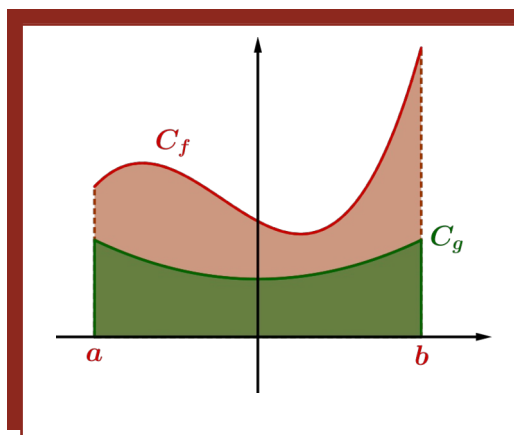
Alors $f(x) - g(x) \geq 0$. D'après la propriété 16, on en déduit que $\int_a^b (f - g)(x)dx \geq 0$.

D'après la linéarité de l'intégrale, on a alors $\int_a^b (f - g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

Ainsi on en déduit que $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Remarque

Dans le cas où f et g sont positives sur $[a; b]$, si $f(x) \geq g(x)$ alors l'aire sous la courbe représentative de f est inférieure ou égale à l'aire sous la courbe représentative de g .

**III.4 Valeur moyenne****Définition 16**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I tels que $a < b$. La **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a; b]$ est le réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Remarques

- Cette définition est la généralisation de la moyenne d'une série statistique : $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i$.
- En cinétique, on peut donc donner la définition de la vitesse moyenne V d'un mobile entre les instants t_1 et t_2 dont la vitesse instantanée est $v(t)$ par : $V = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

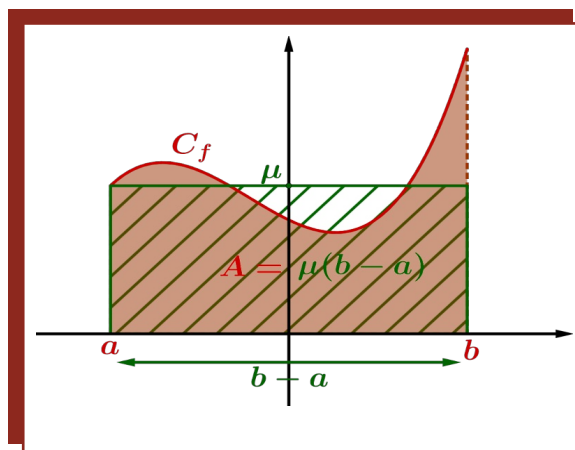
Interprétation graphique

La valeur moyenne μ est telle que :

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$$

Ainsi, lorsque f est continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, la valeur moyenne μ peut-être interprétée comme la hauteur du rectangle de base $b-a$ et ayant la même aire que le domaine A sous la courbe C_f .

$$\text{Ainsi } A = \int_a^b f(x) dx = \mu(b-a).$$



Exemple

La valeur moyenne de la fonction sinus sur $[0; \pi]$ est $\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx$.

Or une primitive de la fonction sinus est $-\cos x$.

Alors $\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$. Ainsi $\mu = \frac{2}{\pi}$.

Propriété 17 (inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I tels que $a \leq b$. Soit deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Démonstration

Par encadrement, si $m \leq f(x) \leq M$, alors $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$.

Or $\int_a^b m dx = [mx]_a^b = mb - ma = m(b-a)$ et $\int_a^b M dx = [Mx]_a^b = Mb - Ma = M(b-a)$.

Ainsi $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

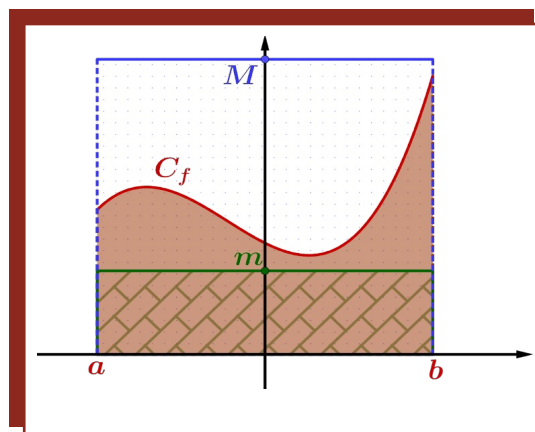
Remarque

On peut obtenir un encadrement de la valeur moyenne de f sur $[a; b]$:

Si $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$, alors en divisant par $b-a$ (à condition que $b-a \neq 0$), on obtient $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$. Ainsi $m \leq \mu \leq M$.

Interprétation graphique

Si la fonction f est bornée sur $[a; b]$ par deux constantes m et M positives, alors l'inégalité de la moyenne traduit le fait que l'aire sous la courbe C_f sur $[a; b]$ est comprise entre les aires des rectangles construits sur $[a; b]$ et de hauteurs respectives m et M .



Exemple

Soit l'intégrale $I = \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$. On peut encadrer cette intégrale.

On commence par encadrer la fonction $x \rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}}$:

$$1 \leq x \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x} \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq 1 + \sqrt{x} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}.$$

On applique ensuite l'inégalité de la moyenne :

$$\frac{1}{4}(9-1) \leq \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}(9-1) \text{ et donc } 2 \leq \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq 4. \text{ Ainsi } 2 \leq I \leq 4.$$