

Vecteurs du plan

I. Notion de vecteur

I.1 Translation et vecteur associé

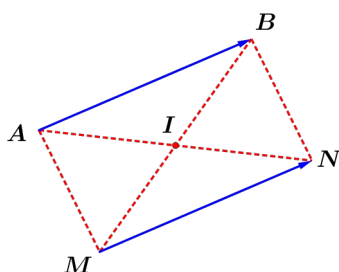
Soit A et B deux points distincts.

La **translation qui transforme A en B** associe à tout point M du plan l'unique point N tel que **$ABNM$ est un parallélogramme**.

On dit alors que N est l'image de M par la translation qui transforme A en B .

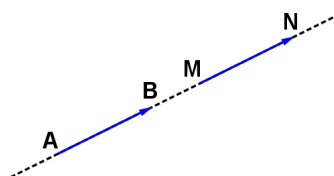
Cette translation est aussi appelée **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** .

1^{er} cas : $M \notin (AB)$



$ABNM$ est un **parallélogramme**

2^e cas : $M \in (AB)$



$ABNM$ est un **parallélogramme aplati**

Remarques

- Pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$: A s'appelle l'**origine** et B l'**arrivée**
- Un vecteur peut être défini par :
 - une **direction** (ici la droite (AB))
 - un **sens** (ici de A vers B)
 - une **norme** (aussi appelée longueur du vecteur, ici AB)

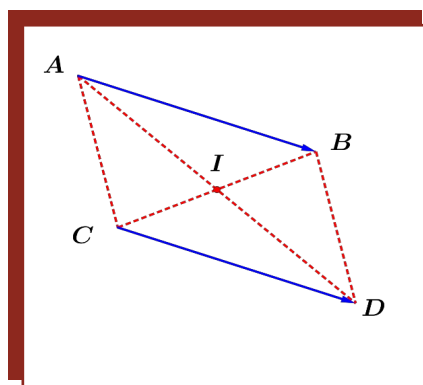
« Le point N est l'image de M par la **translation** qui transforme A en B » équivaut à « $[AN]$ et $[BM]$ se coupent en leur milieu ».

I.2 Égalité de deux vecteurs

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** si la translation qui transforme A en B transforme C en D . On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $[AD]$ et $[BC]$ **se coupent en leur milieu**.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un **parallélogramme**.



$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \text{ si et seulement si } M = B.$$

Représentant d'un vecteur

Il y a une infinité de vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.

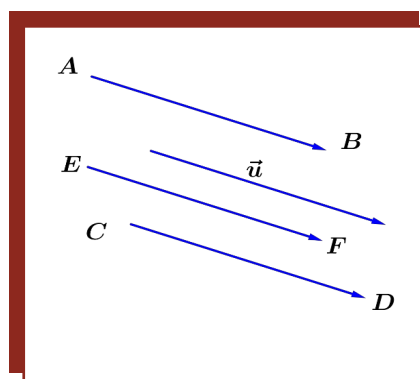
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, alors on dit que

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des

représentants d'un même vecteur que

l'on peut noter avec une seule lettre

($\vec{u}$ par exemple), sans préciser l'origine et l'arrivée.



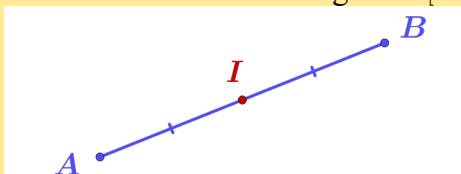
I.3 Vecteur nul et vecteur opposé

- On appelle **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, le vecteur associé à la translation qui transforme A en A, B en B, etc. On a $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.

On appelle **opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, noté $\overrightarrow{BA}$, le vecteur associé à la translation qui transforme B en A. On a $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

I.4 Caractérisation du milieu

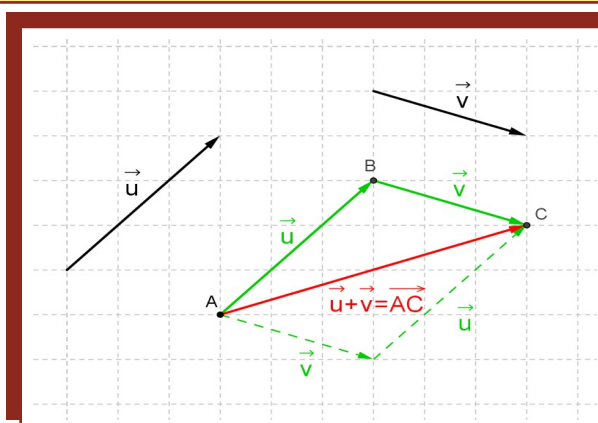
Soit A et B deux points distincts. I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.



II. Somme de vecteurs

II.1 Vecteur somme

La **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$. On note ce vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

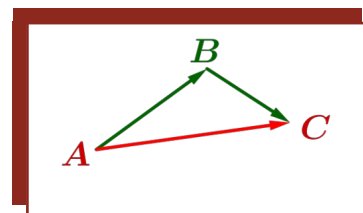
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

Pour la somme, l'ordre n'a pas d'importance.

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

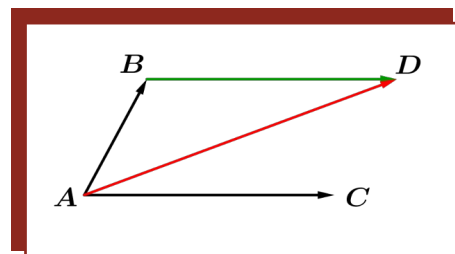
II.2 Relation de Chasles

Pour tous points A , B et C , on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



III.3 Règle du parallélogramme

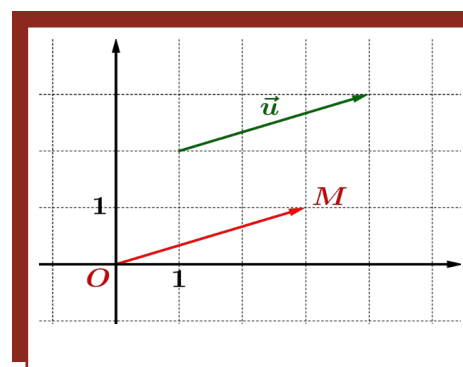
Soit A , B et C trois points distincts.
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ si et seulement si $ABDC$ est un **parallélogramme**.



III. Vecteurs et coordonnées

III.1 Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Si $M(x; y)$, on note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x; y)$.



Deux vecteurs sont **égaux** si et seulement s'ils ont les **mêmes coordonnées** dans un repère.
 Autrement dit, soit deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

III.2 Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Soit deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

III.3 Coordonnées du vecteur somme

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Alors $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

III.4 Coordonnées du vecteur opposé

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors $-\vec{u} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

III.5 Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et k un réel. Alors $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

IV. Norme d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. La norme du vecteur $\vec{u}$ est la longueur AB . On note $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.
Si $\|\vec{u}\| = 1$, le vecteur $\vec{u}$ est dit **unitaire**.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- $\|\overrightarrow{AB}\| = 0 \Leftrightarrow A = B$.
- Pour tout réel k et tout vecteur $\vec{u}$, $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.