

Probabilités conditionnelles

I. Expérience aléatoire et événement

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble Ω (ou E) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.

- Un **événement** A est une partie de l'univers Ω (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de Ω).
- Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.
- Un **événement impossible** est un événement qui n'est réalisé par aucune issue.
- Un **événement certain** est un événement qui est réalisé par toutes les issues.
- L'**événement contraire** de A , noté \bar{A} , est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A .

Donner une **loi de probabilité** associée à une expérience aléatoire c'est en donner toutes les issues et attribuer une probabilité à chacune d'elles de sorte que la somme des probabilités des issues est égale à 1. On peut présenter les résultats sous la forme d'un tableau.

II. Probabilité d'un événement

II.1 Loi des grands nombres

On a simulé n lancers d'un dé équilibré à 6 faces et noté le nombre de fois que le chiffre 4 est sorti. Le tableau suivant résume les résultats obtenus.

Nombre de lancers n	10	50	100	500	1000	10000	100000
Nombre de 4 obtenu	3	10	19	76	161	1681	16649
Fréquence d'apparition du chiffre 4	0,3	0,2	0,19	0,15	0,161	0,1681	0,16649

Si le dé est bien équilibré, le chiffre 4 a une chance sur 6 de sortir, soit $\frac{1}{6} \approx 0,166\dots$

On peut remarquer que la fréquence d'apparition du chiffre 4 se rapproche de cette valeur théorique quand le nombre de lancers augmente.

Lors d'une expérience répétée n fois, les fréquences obtenues d'un événement A de l'expérience se rapprochent d'une valeur théorique lorsque n devient grand. Cette valeur s'appelle **probabilité de l'événement** A et est notée $P(A)$.

II.2 Calculs de probabilité

La probabilité d'un événement A est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A** .

- Pour tout événement A , on a $0 \leq P(A) \leq 1$.
- La **somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1**.

Remarques

- La probabilité de l'événement certain vaut 1. On la note $P(\Omega)=1$ (ou $P(E)=1$).
- La probabilité de l'événement vide vaut 0. On la note $P(\emptyset)=0$.

Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie**.

Lors d'une expérience aléatoire ayant n issues équiprobables :

- La probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$.
- La probabilité d'un événement A est $P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}}$.

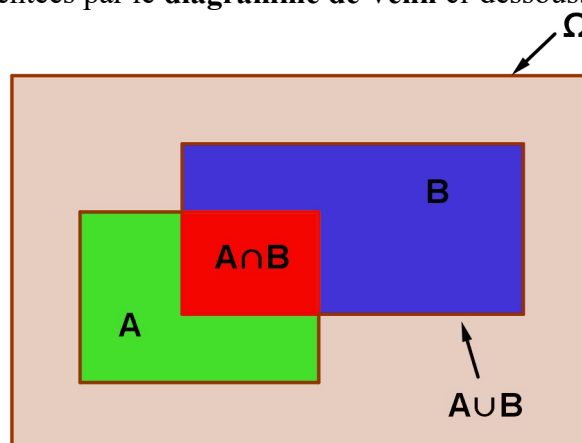
III.3 Événement contraire

La probabilité de l'**événement contraire** d'un événement A est : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

III. Réunion et intersection d'événements

- L'événement « **A et B** », noté $A \cap B$, s'appelle l'**intersection** des événements A et B . Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
- L'événement « **A ou B** », noté $A \cup B$, s'appelle la **réunion** des événements A et B . Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.

Ces situations sont représentées par le **diagramme de Venn** ci-dessous.



Soit A et B deux événements d'une même expérience aléatoire. On a alors :
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

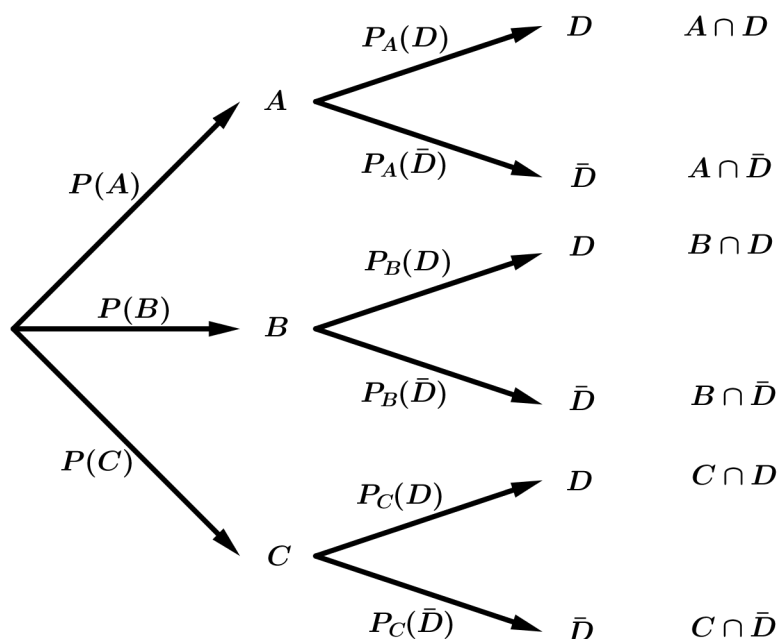
Si l'événement $A \cap B$ ne contient aucun élément (c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$), on dit que les événements A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**).

Si deux événements A et B sont **incompatibles**, alors $P(A \cap B) = 0$.
 Pour conséquence, on en déduit que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Remarque

A et \bar{A} sont incompatibles car $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

IV. Règles d'utilisation d'un arbre de probabilités



Remarque

$P_A(D)$ se lit probabilité de D sachant A . Il s'agit de la probabilité d'avoir l'événement D sachant que l'événement A est réalisé.

Règle 1

La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.

Règle 2

La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.

Règle 3

La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins.

V. Probabilités conditionnelles

On appelle **cardinal de A**, noté $\text{Card}(A)$, l'effectif de l'événement A. Autrement dit, $\text{Card}(A)$ est égal au nombre d'issues qui réalisent l'événement A.

Soit A et B deux événements tels que $\text{Card}(A)$ soit non nul.
La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé est notée $P_A(B)$, et elle est définie par :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

Remarques

- $P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A ».
- Si la probabilité de l'événement B est également non nulle, on peut définir la probabilité conditionnelle que l'événement A se réalise sachant que l'événement B est réalisé, notée $P_B(A)$ et définie par :

$$P_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$$