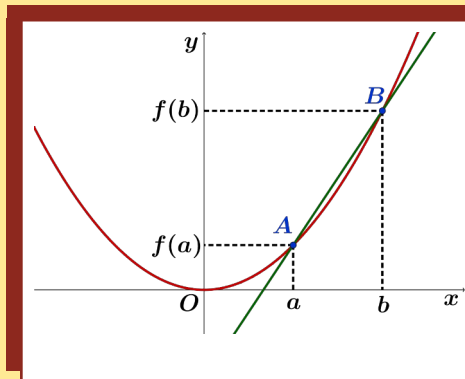


Dérivation

I. Tangente à une courbe

I.1 Sécante à une courbe

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative. On appelle **sécante** à la courbe C_f toute droite passant par deux points A et B distincts de cette courbe.

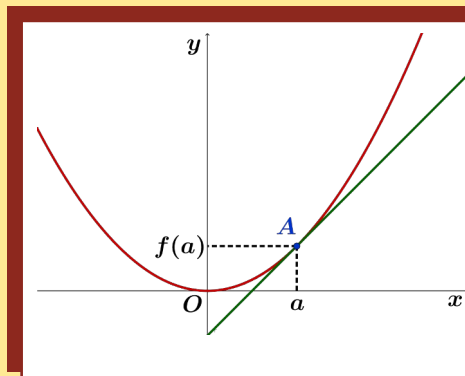


Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant les réels a et b . Le **taux d'accroissement** de la fonction f entre a et b est le réel défini par le quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Le **coefficient directeur** de la sécante (AB) est le taux d'accroissement de f entre a et b .

I.2 Tangente à une courbe

On constate que, lorsque le point B se rapproche du point A , la sécante (AB) tend vers une droite particulière, nommée **tangente** à C_f au point A : aux alentours du point $A(a, f(a))$, elle est semblable à la courbe.



Remarques

- On dit que la tangente à C_f en A « frôle » la courbe autour du point A . C'est la position limite de la sécante quand le point B est confondu avec le point A .
- On nomme généralement T une tangente.
- Une tangente est une droite mais celle-ci ne peut jamais être verticale.

Lorsqu'elle existe, la tangente T à la courbe C_f au point A est **unique**.

II. Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , $a \in I$ et A un point de la courbe C_f d'abscisse a . On appelle **nombre dérivé** de la fonction f en a le coefficient directeur de la tangente T à C_f au point A et on le note $f'(a)$.

L'équation de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

$$T: y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Remarque

Une tangente étant une droite, son équation est de la même forme qu'une fonction affine, c'est-à-dire $y = mx + p$.

III. Fonction dérivée

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I .

On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à chaque x associe $f'(x)$.

Remarque

Toutes les fonctions usuelles vues en première sont dérivables sur leur domaine de définition.

IV. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	D_f	Fonction dérivée	$D_{f'}$
$f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$

V. Opérations sur les fonctions dérivées

Soit f une **fonction polynomiale** de la forme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ définie sur $\mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \neq 0$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$.

Fonction	Fonction dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$u - v$	$u' - v'$
$ku, k \in \mathbb{R}$	ku'

VI. Sens de variation d'une fonction

VI.1 Du sens de variation d'une fonction au signe de la dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si f est **croissante** sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$.
- Si f est **décroissante** sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$.
- Si f est **constante** sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$.

Remarque

Dans de nombreux cas il sera nécessaire de dériver pour étudier les variations d'une fonction, car l'étude du signe de la dérivée sera plus simple que l'étude des variations de la fonction initiale.

VI.2 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$, alors la fonction f est **croissante** sur I .
- Si pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$, alors la fonction f est **décroissante** sur I .
- Si pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$, alors la fonction f est **constante** sur I .
- Si f' est **strictement positive** (respectivement **strictement négative**) sur I , sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est **strictement croissante** (respectivement **strictement décroissante**) sur I .

Remarques

Une flèche dans le tableau de variation d'une fonction f indiquera :

- la stricte croissance ou décroissance de f sur l'intervalle correspondant.
- la continuité (ou absence de rupture) de la courbe C_f sur cet intervalle.

VII. Extremum d'une fonction

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I .

- On dit que le réel M est le **maximum** de f sur I , **atteint** en a , si $f(a)=M$ et si pour tout réel x de I , on a $f(x)\leq M$.
- On dit que le réel m est le **minimum** de f sur I , **atteint** en a , si $f(a)=m$ et si pour tout réel x de I , on a $f(x)\geq m$.
- Un **extremum** de f sur I est un **maximum** ou un **minimum** de f sur I .
- On dit que le réel L est un **maximum** (respectivement **minimum**) **local** de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I , tel que L est le maximum (respectivement minimum) de f sur J .

Remarques

- Les pluriels de "minimum", "maximum" et "extremum" sont "minima", "maxima" et "extrema".
- Graphiquement, il s'agit pour le maximum du plus haut "sommet" de la courbe, et pour le minimum du plus bas "sommet" de la courbe.