

Primitives et équations différentielles

Exercice 1

Vérifier que la fonction F est une solution de l'équation différentielle $(E): y' = f$ sur $\mathbb{R}$:

1. $F(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$ et $(E): y' = 3x^2 - 4x + 1$.
2. $F(x) = 3x^5 - x^2 + 5x - 1$ et $(E): y' = 15x^4 - 2x + 5$.
3. $F(x) = (x-1)e^x$ et $(E): y' = xe^x$.

Exercice 2

Vérifier que la fonction F est une solution de l'équation différentielle $(E): y' = f$ sur $\mathbb{R}$:

1. $F(x) = 5x^2 - 2x - 5$ et $(E): y' = 10x - 2$.
2. $F(x) = 1 - e^{-2x+1}$ et $(E): y' = 2e^{-2x+1}$.
3. $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $(E): y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.
4. $F(x) = \cos x$ et $(E): y' = -\sin x$.

Exercice 3

Vérifier que la fonction F est une solution de l'équation différentielle $(E): y' = f$ sur I :

1. $F(x) = \frac{(x-2)^3}{3}$ et $(E): y' = (x-2)^2$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2+1}$ et $(E): y' = xe^{-x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $F(x) = -\frac{1}{3(3x+6)}$ et $(E): y' = \frac{1}{(3x+6)^2}$ sur $I =]-3; +\infty[$.
4. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(2x-1)$ et $(E): y' = \frac{1}{2x-1}$ sur $I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.

Exercice 4

On lâche une pomme du haut d'un arbre de 10 mètres. Lors de sa chute :

- la vitesse $v(t)$, exprimée en $m.s^{-1}$, de la pomme en fonction du temps, exprimé en s , est solution de l'équation différentielle $y' = 9,8$.
- la distance $d(t)$, exprimée en m , parcourue par la pomme est solution de l'équation différentielle $y' = v$.

Quelle est la vitesse de la pomme lorsqu'elle s'écrase au sol ?

Exercice 5

1. Démontrer que les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^2 - 3$ sont solutions de l'équation différentielle $y' = 2x$.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = e^x$.

Exercice 6

Les fonctions $x \mapsto 4x$ et $x \mapsto 4x + 1$ sont-elles des primitives sur $\mathbb{R}$ d'une même fonction ?

Exercice 7

Soit f et g les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = x \ln x - x$.

1. Démontrer que g est une primitive de f .
2. Déterminer la primitive de f qui s'annule en $x = 1$.

Exercice 8

Soit f et g les fonctions définies sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.

1. Démontrer que g est une primitive de f .
2. Déterminer la primitive de f qui s'annule en $x = 0$.

Exercice 9

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \sin x$ et $g(x) = \sin x - x \cos x$.

1. Démontrer que g est une primitive de f .
2. Déterminer la primitive de f qui s'annule en π .

Exercice 10

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 \cos^3 x$ et $g(x) = 3 \sin x - \sin^3 x$.

1. Démontrer que g est une primitive de f .
2. Déterminer la primitive de f valant 0 en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 11

Soit f et F les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2 \ln x}{x}$ et $F(x) = (\ln x)^2$.

1. Démontrer que F est une primitive de f .
2. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de la fonction g définie sur cet intervalle par $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Exercice 12

Soit f et F les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3xe^{-3x}$ et $F(x) = \left(-x - \frac{1}{3}\right)e^{-3x}$.

1. Démontrer que F est une primitive de f .
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{-3x}$. Déterminer la primitive de g sur $\mathbb{R}$ valant 2 en $x = 1$.

Exercice 13

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$.

Déterminer la primitive de la fonction f vérifiant $F(1) = -1$.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 3x^2 + 8x - 1$.
Déterminer la primitive de la fonction f vérifiant $F(-1) = 0$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x + 4$. Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax + b)e^x + 4$ soit une primitive de la fonction f .

Exercice 15

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(\cos(2x+3) + x)$.
 - a. Montrer que f admet pour primitive la fonction F définie par $F(x) = \sin(2x+3) + x^2 + 50$.
 - b. Donner deux autres primitives de f .
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.
 - a. Montrer que g admet pour primitive la fonction G telle que $G(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}$.
 - b. La fonction H définie par $H(x) = \ln(10x+10) + \frac{x+2}{x+1}$ est-elle une primitive de g ?

Exercice 16

- Soit F et G les fonctions définies sur $]1; +\infty[$ par $F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x-1}$ et $G(x) = \frac{x^2 + 7x - 5}{x-1}$.
1. Montrer que les fonctions F et G sont deux primitives de la même fonction f sur $]1; +\infty[$.
 2. Aurait-on pu prévoir ce résultat ?

Exercice 17

Démontrer dans chacun des cas suivants que la fonction F est une primitive de f sur I .

1. $f(x) = \frac{2(x^4-1)}{x^3}$ et $F(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$.
2. $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ et $F(x) = x - \ln(1+e^x)$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ et $F(x) = \ln(\ln x)$ sur $I =]1; +\infty[$.
4. $f(x) = \cos x - x \sin x$ et $F(x) = x \cos x$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 18

Déterminer une primitive des fonctions f suivantes en précisant l'ensemble d'intégration.

1. $f(x) = 3$;
2. $f(x) = 5x$;
3. $f(x) = \frac{7}{2}x - 3$;
4. $f(x) = 2x^2 + 5x - 8$;
5. $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - 8x$;
6. $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$;
7. $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 3$;
8. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3}$;
9. $f(x) = -3x^2 - \frac{2}{x}$;
10. $f(x) = -\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - 1$;
11. $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 5x + 1}{x}$;
12. $f(x) = 1 - \frac{1}{x^3}$;
13. $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 5x + 1}{x^2}$;
14. $f(x) = \frac{4}{x} + 2e^x$;
15. $f(x) = x^3 + \frac{x^2}{6} - 7$;
16. $f(x) = 4x^3 - 3e^x - \frac{1}{\sqrt{x}}$;
17. $f(x) = 2 \sin x - 5 \cos x$;
18. $f(x) = 6x^3 + 4x$;
19. $f(x) = 2 \sin x + \cos x$;
20. $f(x) = 73 \sin x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
21. $f(x) = 6x^2 + \ln(x)$.

Exercice 19

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

- | | | |
|---------------------------|---------------------------------------|-----------------------|
| 1. $y' = 2$; | 2. $y' = 1 - 2x$; | 3. $y' = 5x - 3$; |
| 4. $y' = x^2$; | 5. $y' = 3x^2 + 2x + 1$; | 6. $y' = e^x - x^3$; |
| 7. $y' = \frac{1}{x^3}$; | 8. $y' = x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; | 9. $y' = \cos x$. |

Exercice 20

Déterminer la solution F des équations différentielles suivantes :

- $y' = x - 1$ telle que F est définie sur $\mathbb{R}$ et $F(1) = -1$.
- $y' = x^2 - x + 1$ telle que F est définie sur $\mathbb{R}$ et $F(0) = 0$.
- $y' = x^3 + x + \frac{1}{x^2}$ telle que F est définie sur $]0; +\infty[$ et $F(1) = \frac{3}{4}$.
- $y' = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{x^5}$ telle que F est définie sur $] -\infty; 0[$ et $F(-1) = 1$.

Exercice 21

Déterminer une primitive des fonctions f suivantes en précisant l'ensemble d'intégration.

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $f(x) = 6 \cos x - 5 \sin x$; | 2. $f(x) = -7x^2 + \frac{4}{x^3} - 2 \ln(x)$; | 3. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 2x + 3$; |
| 4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$; | 5. $f(x) = 3e^x + x^2 + x^4$; | 6. $f(x) = \frac{1}{x} + e^x$; |
| 7. $f(x) = -\frac{3}{x} - \frac{1}{2}e^x + 7 \ln x$; | 8. $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + x + 9$; | 9. $f(x) = -\frac{7}{x^2} + \frac{\ln x}{8}$. |

Exercice 22

Déterminer une primitive des fonctions f suivantes en précisant l'ensemble d'intégration.

- | | | |
|---------------------------------------|---|--|
| 1. $f(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$; | 2. $f(x) = -x(1-x^2)^3$; | 3. $f(x) = \frac{2}{(x+3)^2}$; |
| 4. $f(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$; | 5. $f(x) = \frac{9x^2-3}{(x^3-x)^2}$; | 6. $f(x) = 2e^{2x}$; |
| 7. $f(x) = \frac{2x}{(x^2+3)^2}$; | 8. $f(x) = e^{1-3x}$; | 9. $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$; |
| 10. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; | 11. $f(x) = \frac{x}{(x^2+2)^3}$; | 12. $f(x) = xe^{x^2-1}$; |
| 13. $f(x) = x^2 e^{x^3}$; | 14. $f(x) = -\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}$; | 15. $f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}$; |
| 16. $f(x) = \frac{3x^2}{(x^3-1)^4}$; | 17. $f(x) = 2x(x^2+1)^3$; | 18. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$. |

Exercice 23

Déterminer une primitive des fonctions f suivantes en précisant l'ensemble d'intégration.

1. $f(x) = (x+2)^3$;
2. $f(x) = 4x(6x^2+1)$;
3. $f(x) = x^2(x^3-1)^2$;
4. $f(x) = 2x(3x^2-1)^3$;
5. $f(x) = \sin x \cos x$;
6. $f(x) = 2x(1+x^2)^5$;
7. $f(x) = \frac{(x-1)^5}{3}$;
8. $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2+x)^5$;
9. $f(x) = 3 \cos x \sin^2 x$;
10. $f(x) = x^7(x^8-1)^6$;
11. $f(x) = (x^3+2x)(x^4+4x^2+1)^{10}$;
12. $f(x) = x\sqrt{1+4x^2}$.

Exercice 24

Déterminer une primitive des fonctions f suivantes en précisant l'ensemble d'intégration.

1. $f(x) = \frac{2}{(x+4)^3}$;
2. $f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$;
3. $f(x) = \frac{1}{(3x-1)^2}$;
4. $f(x) = \frac{x^3+1}{(x^4+4x+1)^2}$;
5. $f(x) = \frac{4x^2}{(x^3+8)^3}$;
6. $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}$;
7. $f(x) = \frac{4}{(2x-4)^4}$;
8. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$;
9. $f(x) = -\frac{16}{(x-5)^2}$;
10. $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^3}$;
11. $f(x) = \frac{1}{(3x+1)^4}$;
12. $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^6}$.

Exercice 25

Déterminer une primitive des fonctions f suivantes en précisant l'ensemble d'intégration.

1. $f(x) = \frac{1}{x-4}$;
2. $f(x) = \frac{2}{3x+5}$;
3. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$;
4. $f(x) = \frac{16x+4}{4x^2+2x+1}$;
5. $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x+1}$;
6. $f(x) = \frac{3}{x-4}$;
7. $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$;
8. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}$;
9. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$;
10. $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$;
11. $f(x) = \frac{x^4}{x^5+3}$;
12. $f(x) = \tan x$.

Exercice 26

Déterminer une primitive des fonctions f suivantes en précisant l'ensemble d'intégration.

1. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$;
2. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$;
3. $f(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+2}}$;
4. $f(x) = \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x}}$;
5. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;
6. $f(x) = -\frac{e^x}{\sqrt{e^x+5}}$;
7. $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+6}}$;
8. $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}$;
9. $f(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

Exercice 27

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y' = -2e^{-2x}$;
2. $y' = 4e^{-5x}$;
3. $y' = -2e^{6x-7}$;
4. $y' = xe^{-x^2}$.

Exercice 28

Déterminer une primitive des fonctions f suivantes en précisant l'ensemble d'intégration.

1. $f(x) = e^{x+1}$;
2. $f(x) = e^{-x+2}$;
3. $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$;
4. $f(x) = -6e^{2x+1}$;
5. $f(x) = x^2 e^{x^3}$;
6. $f(x) = e^{x \ln 4}$;
7. $f(x) = e^{7x+2} + 3e^{-2x}$;
8. $f(x) = 2e^{3x-2}$;
9. $f(x) = \sin x e^{\cos x}$;
10. $f(x) = 6xe^{x^2+1}$;
11. $f(x) = x^3 e^{2x^4}$;
12. $f(x) = e^{3x} + 1$.

Exercice 29

Déterminer une primitive des fonctions f suivantes en précisant l'ensemble d'intégration.

1. $f(x) = \cos 2x$;
2. $f(x) = \sin 3x$;
3. $f(x) = 5 \sin(9x+5)$;
4. $f(x) = 6 \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$;
5. $f(x) = \cos\left(\frac{3}{2}x - 7\right) + \frac{8}{3}x^2$;
6. $f(x) = 6 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;
7. $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}}$;
8. $f(x) = \frac{\sin x}{5} + \frac{\cos x}{2}$;
9. $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.

Exercice 30

Dans chacun des cas, trouver la primitive des fonctions f suivantes qui vérifient la condition donnée sur un intervalle I à préciser.

1. $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4x + 1$ et $F(2) = 0$;
2. $f(x) = \frac{2}{x^2} + x$ et $F(1) = 0$;
3. $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$ et $F(0) = 0$;
4. $f(x) = -\frac{1}{3-x}$ et $F(1) = 1$;
5. $f(x) = e^{3x+1}$ et $F(-1) = 0$;
6. $f(x) = xe^{-x^2}$ et $F(\sqrt{\ln 2}) = 1$;
7. $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$ et $F(0) = 0$;
8. $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ et $F(2) = 0$;
9. $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
10. $f(x) = \cos x \sin^2 x$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Exercice 31

Déterminer une primitive des fonctions f suivantes en précisant l'ensemble d'intégration.

1. $f(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$;
2. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$;
3. $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{2}{x}}$;
4. $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$;
5. $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$;
6. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;
7. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$;
8. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;
9. $f(x) = \cos x + \cos^2 x$.

Exercice 32

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x+1}$.

1. Démontrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

Exercice 33

Soit f la fonction définie sur $]3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x-7}{x^2-2x-3}$.

1. Démontrer que pour tout $x \in]3; +\infty[$, $f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3} + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur $]3; +\infty[$.

Exercice 34

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 4x^2 + 3}{x^2 + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x , $f(x) = x^2 - x + 3 + \frac{x}{x^2 + 1}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la primitive de f dont la courbe représentative passe par le point $A(0; -1)$.

Exercice 35

1. Soit la fonction f définie sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x+5}{2x+1}$.

Montrer qu'il existe $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = a + \frac{b}{2x+1}$. En déduire une primitive de f .

2. Soit la fonction f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 4}{x-2}$.

Montrer qu'il existe $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$. En déduire une primitive de f .

Exercice 36

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$ par $f(x) = \frac{2x}{(x-3)(x+3)}$.

Montrer qu'il existe $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$.

En déduire une primitive de f sur $[3; +\infty[$, sur $] -3; 3[$ et sur $] -\infty; -3[$.

2. Soit la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 - 1)^2}$.

Montrer qu'il existe $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x+1)^2}$. En déduire une primitive de f .

Exercice 37

Soit f la fonction définie sur $]0; 1[$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel $x \in]0; 1[$, $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$.
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 38

Déterminer une primitive des fonctions f suivantes en précisant l'ensemble d'intégration.

1. $f(x) = \sin x \cos^4 x$;
2. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;
3. $f(x) = e^{-2x+6}$;
4. $f(x) = x^2 \cos x$;
5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+5}}$;
6. $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}$;
7. $f(x) = \tan(2x-1)$;
8. $f(x) = (x+1)\sin 3x$;
9. $f(x) = \frac{1}{\tan x}$;
10. $f(x) = \frac{2x-1}{4x}$;
11. $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$;
12. $f(x) = 2xe^{x^2}$;
13. $f(x) = 4\sin(3x)\cos(3x)$;
14. $f(x) = \cos x \sin^2 x$;
15. $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$;
16. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$;
17. $f(x) = (x^2-4)\sqrt{x^3-12x}$;
18. $f(x) = \cos^2 x$;
19. $f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$;
20. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$;
21. $f(x) = x^2 e^x$.

Exercice 39

1. Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

- a. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel $x \in]1; +\infty[$, $f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}$.
- b. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

2. Soit f la fonction définie sur $] -2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^3+9x^2+12x+2}{(x+2)^2}$.

- a. Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout réel $x \in] -2; +\infty[$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}$.
- b. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 40

1. Soit f la fonction définie sur $] -2; 2[$ par $f(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2}$.

- a. Factoriser l'expression $(x^2-4)^2$.
- b. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in] -2; 2[$, $f(x) = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x+2)^2}$.
- c. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

2. Soit f la fonction définie sur $] -1; 1[$ par $f(x) = \frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$.

- a. Factoriser l'expression $(x^2-1)^3$.
- b. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel $x \in] -1; 1[$, $f(x) = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x+1)^3}$.
- c. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 41

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant l'ensemble de définition des solutions.

1. $x^2 y' = -1$; 2. $\sqrt{x} y' + 1 = 0$; 3. $x^4 y' = 3(x-1)^2$; 4. $e^{2x} y' = -e^x$.

Exercice 42

Soit y une fonction dérivable sur un intervalle I telle que y' est également dérivable sur I .

On note y'' la dérivée de y' . On souhaite résoudre l'équation différentielle (E): $y'' = -4x + 3$.

1. On pose $z = y'$. Déterminer une équation différentielle (E'), d'inconnue z , équivalente à (E).
 2. Résoudre l'équation différentielle (E').
 3. À partir des solutions z de (E'), déterminer toutes les solutions y de (E).

Exercice 43

Montrer que la fonction $x \rightarrow \cos x$ est solution de l'équation différentielle (E): $y'' + y = 0$.

Exercice 44

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' = 2x - 1$; 2. $y'' = e^x + e^{-x}$; 3. $x^3 y'' = -2$; 4. $e^{2x} y'' = 4$.

Exercice 45

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. (E₁): $y' = 3y$; 2. (E₂): $y' = 5y$; 3. (E₃): $y' + 2y = 0$;
 4. (E₄): $2y' = y$; 5. (E₅): $4y' + 3y = 0$; 6. (E₆): $3y' - 5y = 0$.

Exercice 46

1. Résoudre l'équation $3y' = 2y$ et donner l'allure des courbes solutions.

2. Déterminer l'unique solution f telle que $f(1) = e$.

Exercice 47

1. Résoudre les équations suivantes : a. (E): $y' = 2y$;

b. (E'): $y' = -5y$.

2. Donner l'allure des courbes solutions.

Exercice 48

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. (E₁): $-2y' = \frac{1}{3}y$; 2. (E₂): $5y' = \sqrt{5}y$; 3. (E₃): $y' - \frac{1}{2}y = 0$;
 4. (E₄): $2y' - 3y = 8y + 4y'$; 5. (E₅): $5y' + 3y = 0$; 6. (E₆): $-\frac{3}{2}y' - \sqrt{2}y = 0$.

Exercice 49

Pendant le premier mois de croissance de certaines plantes, telle que le maïs, le coton ou le soja, la vitesse de croissance, exprimé en g/jour, est proportionnelle au poids P du moment.

Pour certaines espèces de coton, $\frac{dP}{dt} = 0,21P$.

1. Déterminer la forme de la fonction P .
 2. Évaluer le poids d'une plante à la fin du mois ($t = 30$) si la plante pesait 70 mg à $t = 0$.

Exercice 50

Déterminer la solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale donnée.

1. $(E_1): y' - 3y = 0$ et $y(0) = 2$;
2. $(E_2): y' + 4y = 0$ et $y(0) = -4$;
3. $(E_3): 2y' + 3y = 0$ et $y(2) = 1$;
4. $(E_4): 5y' - 2y = 0$ et $y(5) = e$.

Exercice 51

Soit a un réel non nul et l'équation différentielle $(E): y' = ay$. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.

1. Toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) est représentée par une courbe qui admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
2. Il existe une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique admet une asymptote verticale.
3. Il existe une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui s'annule 1.
4. Il existe une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui est constante.

Exercice 52

Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone. Tant qu'il est en vie, l'organisme d'un être vivant contient la même proportion de carbone 14. À sa mort, la quantité de cet élément chimique décroît. On note $N(t)$ le nombre de noyaux de carbone 14 que contient un organisme t années après sa mort. On admet que la fonction N est solution de l'équation différentielle $(E): y' = -0,000121y$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) en prenant comme condition initiale $N(0) = N_0$, où $N_0 \in \mathbb{N}$.
2. On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps au bout duquel le nombre de noyaux a diminué de moitié. Calculer la demi-vie du carbone 14.

Exercice 53

Le tableau suivant donne l'évolution des ventes d'un produit commercialisé depuis 2000.

Rang de l'année à partir de 2000	0	5	10	15	19
Montant des ventes en milliers d'euros	0,8	1,3	2,17	3,59	5,34

1. Ces résultats incitent à ajuster ces ventes par une fonction $f: x \rightarrow ae^{bx}$, avec a et b réels. Déterminer les valeurs de a et de b telles que $f(0) = 0,8$ et $f(10) = 2,17$.
2. Écrire l'équation différentielle dont la fonction f est solution.
3. Estimer, en milliers d'euros, le montant des ventes en 2023.

Exercice 54

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $(E_1): y' = -y + 2$;
2. $(E_2): y' = 3y - 15$;
3. $(E_3): y' = -2y + 5$;
4. $(E_4): y' = y - 3$;
5. $(E_5): 2y' + y = 4$;
6. $(E_6): 3y' - 6y = 1$.

Exercice 55

On considère l'équation différentielle $(E): y' = -\frac{1}{2}y + 3$.

Donner la seule solution constante sur $\mathbb{R}$ de (E) . En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 56

On considère l'équation différentielle (E): $2y' = 8y - 10$.

Déterminer les solutions de (E), puis déterminer la solution qui s'annule en 1.

Exercice 57

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale donnée.

1. $(E_1): y' = 3y - 6$ et $f(0) = -1$;
2. $(E_2): y' = -5y + 4$ et $f(1) = 0$;
3. $(E_3): y' = y - 1$ et $f(2) = 1$;
4. $(E_4): y' - 2y = 5$ et $f(0) = 0$.

Exercice 58

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E): $y' = 0,8y + 1,6$.

2. Vérifier que toutes les solutions de (E) admettent une asymptote horizontale que l'on précisera.

Exercice 59

On considère les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{10x} + 5$, où C est un réel.

Écrire une équation différentielle dont les solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions f .

Exercice 60

1. Résoudre l'équation (E): $5y' - y = 4$, puis déterminer la solution qui prend en 5 la valeur -5 .

2. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4 - e^{\frac{1}{5}x-1}$.

a. Vérifier que f est la solution trouvée à la question 1.

b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis calculer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 61

On place une tasse de thé bouillante dans une pièce où la température est constante et égale à 20°C . Selon la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement de la tasse est proportionnelle à la différence de la température de la tasse et la température de la pièce.

On note $T(t)$ la température, exprimé en $^\circ\text{C}$, de la tasse à l'instant t , exprimé en minute.

On suppose que $T(0) = 100$ et, d'après la loi de Newton, il existe une constante réelle k telle que $T'(t) = k(T(t) - 20)$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = k(y - 20)$ et en déduire l'expression de $T(t)$ en fonction de k .

2. Au bout de 14 minutes, la température du thé est égale à 40°C .

a. Démontrer que $k = -\frac{\ln 2}{7}$.

b. Au bout de combien de temps la température du thé devient-elle inférieure à 25°C ?

Exercice 62

Une personne est placée sous perfusion de pénicilline, à raison de 0,1 milligramme de substance par minute. On note $Q(t)$ la quantité de pénicilline présente dans le sang au temps t , exprimé en minutes. On admet qu'il existe une constante $k > 0$ telle que $Q'(t) = 0,1 - Q(t)$.

1. Sachant que $Q(0) = 0$, exprimer $Q(t)$ en fonction de k et t .

2. La limite de $Q(t)$ en $+\infty$ dépend-elle de k ?

3. Calculer g sachant qu'au bout de 3 heures, $\mathbb{R}$ est égale à la moitié de la valeur limite.

Exercice 63

Un condensateur de capacité C farads est chargé sous une tension initiale de 20 volts. Il se décharge ensuite dans un résistor de résistance R ohms.

En notant $u(t)$ la mesure de la tension en volts au bout de t secondes aux bornes du condensateur, u est alors une fonction définie sur $[0; +\infty[$, qui est solution de l'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{RC} y = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle et en déduire la fonction u .
2. Pour cette question, $R = 1000$ et $C = 10^{-4}$. Pendant combien de temps, au centième de seconde près, la tension aux bornes du condensateur reste-elle supérieure ou égale à 5 volts ?

Exercice 64

Dans chacun des cas, vérifier que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ est solution particulière de (E).

1. $\phi(x) = e^{-5x+1} + \frac{3}{5}$ et (E): $y' = -5y + 3$;
2. $\phi(x) = 2x + 2$ et (E): $y' = -2y + 4x + 6$;
3. $\phi(x) = (x+1)e^{-2x}$ et (E): $y' = -2y + e^{-2x}$;
4. $\phi(x) = -x - \frac{1}{2}$ et (E): $y' = 2y + 2x$.

Exercice 65

Soit l'équation différentielle (E): $2y' - y = 2x$.

1. Déterminer une fonction affine ϕ solution particulière de (E).
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E).
3. Déterminer l'unique solution F de (E) telle que $F(0) = -2$.

Exercice 66

Soit l'équation différentielle (E): $y' + 3y = 9x$.

1. Montrer que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = 3x - 1$ est une solution particulière de (E).
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E).

Exercice 67

1. Soit l'équation différentielle (E): $y' - 3y = 3x^2 + x + 2$.

a. Montrer que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = -x^2 - x - 1$ est une solution particulière de (E).

b. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E).

2. Soit l'équation différentielle (E'): $y' + y = e^{-x}$.

a. Montrer que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = xe^{-x}$ est une solution particulière de (E').

b. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E').

Exercice 68

On considère l'équation différentielle (E): $y' = y + e^x$.

1. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$ est solution particulière de (E).

2. En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire l'unique solution h de (E) telle que $h(0) = 5$.

Problèmes**Problème 1** ...Une étude classique...**Partie A**

On veut résoudre l'équation différentielle (E): $xy' - y = x^2 e^{2x}$, où y est dérivable sur $]0; +\infty[$.

1. Montrer que si f , définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, est solution de (E), alors g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation (E'): $y' = e^{2x}$.

2. En déduire les solutions de (E) puis déterminer la solution de (E) qui s'annule en $\frac{1}{2}$.

Partie B

Soit la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{e}{2} x$.

Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .

Problème 2 ...Cycliste en piste...

Un cycliste roule sur une route descendante, rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse, exprimée en $m.s^{-1}$, à l'instant t , exprimé en s . On suppose que la fonction v ainsi que définie est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que v est solution de l'équation différentielle (E): $10v' + v = 30$. Enfin, on suppose que le cycliste s'élance avec une vitesse initiale nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$.

1. Démontrer que $v(t) = 30 \left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right)$.

2. a. Déterminer les variations de la fonction v sur $[0; +\infty[$.

b. Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.

3. Dans cette question, on considère que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à $0,1 m.s^{-1}$. À l'aide de la calculatrice, déterminer à la seconde près la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

Problème 3 ...Une histoire d'épidémie...

On étudie une épidémie dans une population. Au bout de l'épidémie, on constate que 0,01 % de la population est contaminée. On note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours pour $t \in [0; 30]$. On a donc $y(0) = 0,01$.

On admet que la fonction y ainsi définie est dérivable et strictement positive sur $[0; 30]$ et vérifie l'équation différentielle (E): $y' = 0,05 y(10 - y)$.

1. Soit la fonction z définie sur $[0; 30]$ par $z = \frac{1}{y}$. Démontrer que y est solution de (E) avec $y(0) = 0,01$ si et seulement si z est solution de (E'): $z' = -0,5z + 0,05$.

2. En déduire l'expression de z , puis celle de y , en fonction de t .

3. Calculer le pourcentage, arrondi à l'unité, de la population contaminée au bout d'un mois.

Problème 4 ...Problème de primitive...

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-x^2 + x + 2)e^x$ et F une primitive de f .

1. Déterminer $F'(-1)$ et $F'(2)$.

2. On admet qu'on peut trouver des réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = (ax^2 + bx - 1)e^x$.

a. Exprimer $F'(x)$ en fonction de x , a et b .

b. À l'aide de la question 1, démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = (-x^2 + 3x - 1)e^x$.

Problème 5 ...Que d'exponentielles...

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$.

Soit l'équation différentielle (E): $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E'): $y' + 2y = 0$.

2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$ est une solution de (E').

3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3e^{-3x}$ est une solution de (E).

4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Problème 6 ...Un modèle de bénéfice...

Une entreprise étudie la progression de ses bénéfices ou pertes, évalués au premier janvier de chaque année, depuis le 1^{er} janvier 2009.

Chaque année est identifiée par son rang. À l'année 2009 est attribué le rang 0 et à l'année 2009 + n le rang n . Ainsi, 2011 a le rang 2.

Le tableau suivant indique pour chaque rang d'année x_i le bénéfice ou la perte réalisé(e), exprimé(e) en milliers d'euros et noté(e) y_i .

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	-25,000	-3,111	9,892	17,788	22,958	25,566

On cherche à approcher ces bénéfices par une fonction. On fait l'hypothèse que la fonction f solution de l'équation différentielle $2y' + y = 30$ permettra une bonne modélisation.

1. Déterminer la fonction f .

2. On considère que l'approximation des bénéfices par f est satisfaisante si la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées y_i et les valeurs approchées x_i est inférieure à 0,5.

L'approximation par f est-elle satisfaisante ? (le résultat obtenu à l'aide de la calculatrice constituera une justification acceptable pour cette question)

3. En considérant toujours ce modèle :

a. En quelle année le bénéfice évalué le 1^{er} janvier dépassera-t-il 29800 euros ?

b. Ce bénéfice atteindra-t-il 30000 euros ?

Problème 7 ...Une histoire de taille...

En biologie, un modèle proposé pour la croissance d'êtres vivants est le suivant : tout individu de taille maximale M admet une vitesse de croissance proportionnelle à la taille manquante.

Autrement dit, si on note $C(t)$ la taille à l'instant t , cette fonction est solution de l'équation différentielle $C'(t) = k(M - C(t))$, où k est un réel positif.

1. En supposant $C(0) = 0$, exprimer, en fonction de k et de M , les solutions de cette équation.

2. Vérifier que C est croissante et calculer sa limite en $+\infty$.

3. Une espèce de maïs a une taille maximale de 180 cm et met 15 jours pour atteindre la moitié de celle-ci. Au bout de combien de jours sera-t-elle à moins de 10 cm de sa taille maximale ?

Problème 8 ...Le stimulateur cardiaque...

Le stimulateur cardiaque est un appareil destiné à certaines personnes dont le rythme du cœur est devenu trop lent. Implanté sous la peau, l'appareil envoie des impulsions électriques régulières au cœur lorsque le rythme cardiaque est insuffisant. Un stimulateur cardiaque est constitué de deux composants :

- un condensateur de capacité C égale à $4 \cdot 10^{-7}$ farad
- un conducteur ohmique de résistance R égale à $2 \cdot 10^6$ ohms

Une fois le condensateur chargé, la tension à ses bornes est égale à 5,6 volts. Il se décharge ensuite dans le conducteur ohmique.

Partie A

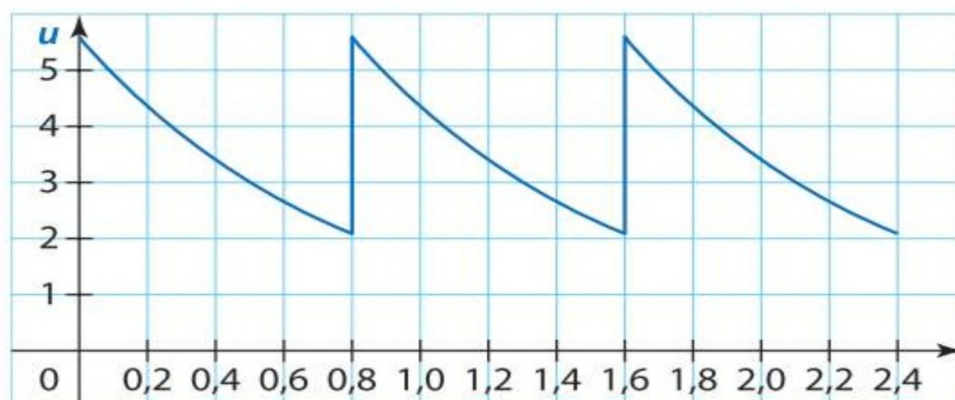
La tension U , en volts, aux bornes du condensateur est une fonction dépendant du temps t , en secondes. On admet que $u(0) = 5,6$ et que cette fonction u , définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$, vérifie pour tout $t \geq 0$ la relation $u'(t) + \frac{1}{RC}u(t) = 0$, où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u .

1. a. Vérifier que la fonction u est solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle $y' + 1,25y = 0$.
 b. Résoudre l'équation différentielle $y' + 1,25y = 0$.
 c. Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $u(t) = 5,6e^{-1,25t}$.
2. a. Étudier mathématiquement le sens de variations de la fonction u sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
 b. Ce résultat était-il prévisible? Justifier votre réponse.

Partie B

En réalité lorsque la tension U aux bornes du condensateur a perdu 63% de sa valeur initiale $u(0)$, le stimulateur cardiaque envoie une impulsion électrique au cœur, ce qui provoque un battement. On considère que le condensateur se recharge instantanément et que la tension mesurée à ses bornes est à nouveau égale à 5,6 volts.

1. a. Vérifier que la tension aux bornes du condensateur qui déclenche l'envoi d'une impulsion électrique au cœur est de 2,072 volts.
 b. Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$ l'équation $5,6e^{-1,25t} = 2,072$.
 c. Interpréter le résultat trouvé.
2. Chez l'adulte en bonne santé, le pouls au repos se situe entre 50 et 80 pulsations par minute. On admet que le stimulateur cardiaque d'un patient souffrant d'insuffisance envoie une impulsion électrique au cœur toutes les 0,8 seconde.



Ce rythme correspond-il à celui d'un adulte au repos et en bonne santé? Justifier votre réponse.

Problème 9 ...Satellites...

En raison des frottements avec l'atmosphère résiduelle terrestre, les satellites en orbite basse perdent progressivement de l'altitude et finissent par se consumer dans les couches les plus denses de l'atmosphère. Cet événement est appelé rentrée atmosphérique. Le temps, exprimé en jours, avant la rentrée atmosphérique dépend des caractéristiques du satellite et de l'altitude h de son orbite, exprimée en kilomètres. Pour un satellite donné, ce temps est modélisé par une fonction T de la variable h , définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Les deux parties de ce problème peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Étude d'un premier satellite

On admet que la fonction T , associée à ce premier satellite, est une solution de l'équation différentielle (E) suivante dans laquelle y désigne une fonction de la variable h définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et y' la fonction dérivée de y :

$$(E): 40y' - y = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer la fonction T solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition $T(800) = 2000$.

Partie B : Étude d'un deuxième satellite

Dans cette partie, on admet que la fonction T , associée à un deuxième satellite, est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $T(h) = K \times 0,012 e^{0,025(h-150)}$

Le nombre réel K est appelé coefficient balistique d satellite.

On considère l'algorithme suivant en langage Python.

```
from math import*
def fonction_coefficient(K,h):
    return (K*0.012*exp(0.025*(h-150)))
K=0
while fonction_coefficient(K,500)<1400:
    K=K+0.5
print(K)
```

1. Quel est le rôle de cet algorithme ?
2. Quelle valeur K affiche-t-il en sortie ?

Partie C : Le satellite Hubble

Le satellite Hubble a un coefficient balistique K égal à 11. La fonction T , associée à ce satellite, est donc définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $T(h) = 0,132 e^{0,025(h-150)}$.

1. L'orbite du satellite Hubble est située à l'altitude h de 575 kms. Calculer le temps $T(h)$ restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble. On arrondira au jour près.
2. On souhaite étudier l'effet d'une augmentation de 10 kms de l'altitude h sur le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.
 - a. Montrer que $T(h+10) = e^{0,25} T(h)$.
 - b. En déduire qu'augmenter l'altitude h de 10 kms revient à augmenter d'environ 28% le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.