

Chapitre 9

Vecteurs du plan

I. Notion de vecteur

I.1 Translation et vecteur associé

Définition 1

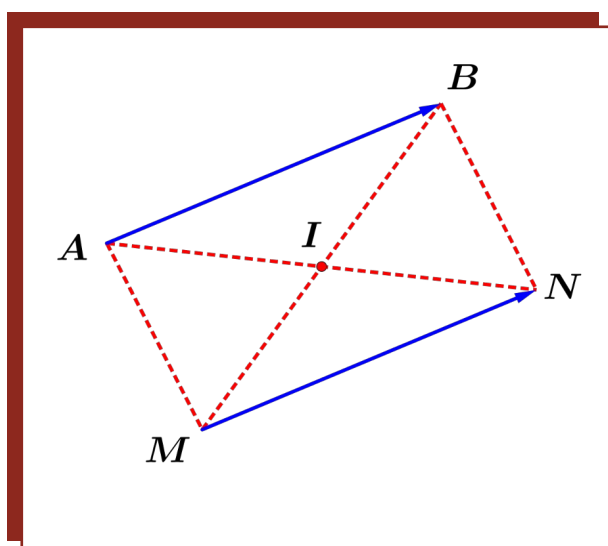
Soit A et B deux points distincts.

La **translation qui transforme A en B** associe à tout point M du plan l'unique point N tel que $ABNM$ est un parallélogramme.

On dit alors que N est l'**image de M par la translation qui transforme A en B** .

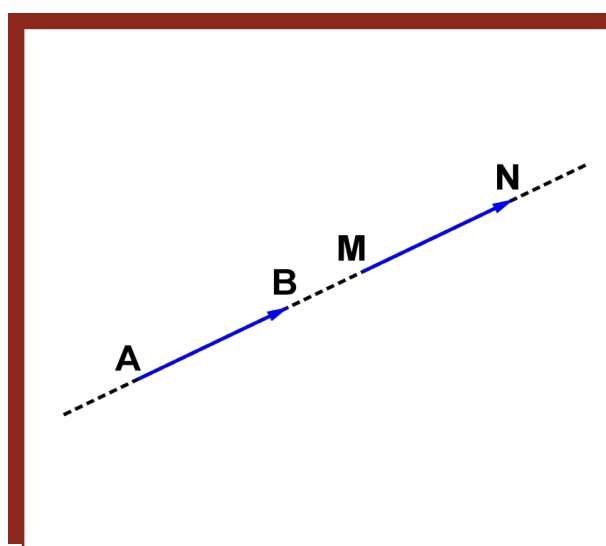
Cette translation est aussi appelée **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** .

1^{er} cas : $M \notin (AB)$



$ABNM$ est un **parallélogramme**

2^e cas : $M \in (AB)$



$ABNM$ est un **parallélogramme aplati**

Remarques

- Pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$: A s'appelle l'**origine** et B l'**arrivée**
- Un vecteur peut être défini par :
 - une **direction** (ici la droite (AB))
 - un **sens** (ici de A vers B)
 - une **norme** (aussi appelée longueur du vecteur, ici AB)

Propriété 2

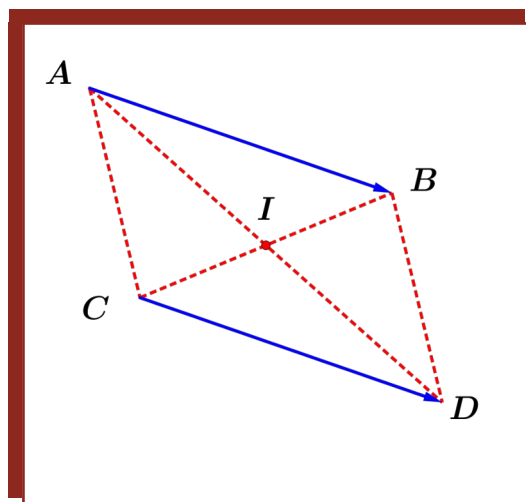
« Le point N est l'image de M par la **translation** qui transforme A en B » équivaut à « $[AN]$ et $[BM]$ se coupent en leur milieu ».

I.2 Égalité de deux vecteurs

Définition 3

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** si la translation qui transforme A en B transforme C en D.

On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

**Propriété 4**

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $[AD]$ et $[BC]$ **se coupent en leur milieu**.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un **parallélogramme**.

Démonstration

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme C en D

$\Leftrightarrow [AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu

$\Leftrightarrow$ ABDC est un parallélogramme

Propriété 5

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ si et seulement si $M = B$.

Représentants d'un vecteur

Il y a une infinité de vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.

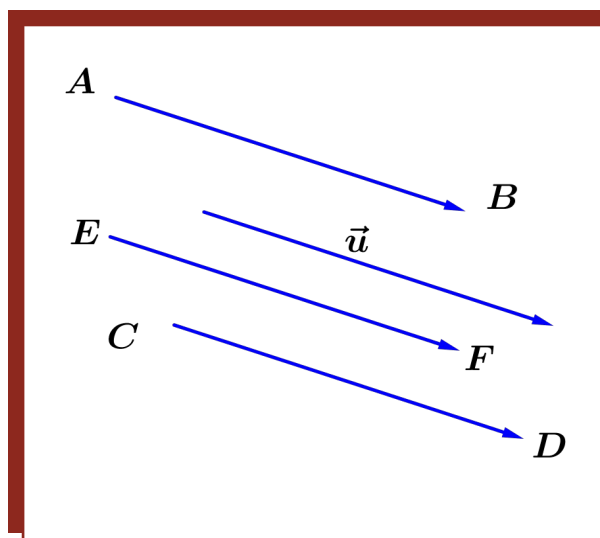
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, alors on dit que

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des

représentants d'un même vecteur que

l'on peut noter avec une seule lettre

($\vec{u}$ par exemple), sans préciser l'origine et l'arrivée.



I.3 Vecteur nul et vecteur opposé

Définition 6

On appelle **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, le vecteur associé à la translation qui transforme A en A, B en B, etc. On a $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.

Propriété 7

$\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.

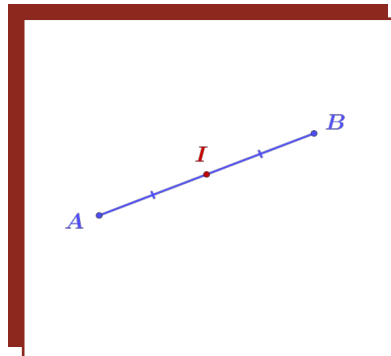
Définition 8

On appelle **opposé** du vecteur $\vec{AB}$, noté $\vec{BA}$, le vecteur associé à la translation qui transforme B en A. On a $\vec{BA} = -\vec{AB}$.

I.4 Caractérisation du milieu

Propriété 9

Soit A et B deux points distincts. Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\vec{AI} = \vec{IB}$.



Démonstration

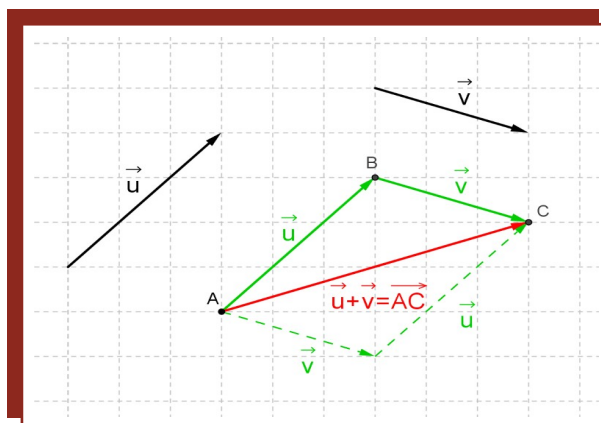
I milieu de $[AB] \Leftrightarrow M \in [AB] \text{ et } IA = IB$
 $\Leftrightarrow$ les points A, I et B sont alignés dans cet ordre et $IA = IB$
 $\Leftrightarrow (AM) \parallel (MB)$, le sens de A vers M est celui de M vers B et $IA = IB$
 $\Leftrightarrow \vec{AI} = \vec{IB}$

II. Somme de vecteurs

II.1 Vecteur somme

Définition 10

La **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$. On note ce vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



Remarque

On obtient un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$ en mettant « bout à bout » un représentant de $\vec{u}$ et un représentant de $\vec{v}$.

Propriété 11

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

$$\bullet \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad \bullet \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

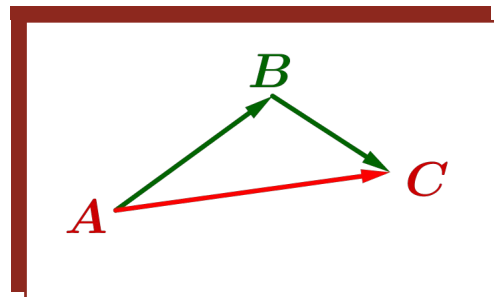
$$\bullet \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

Pour la somme, l'ordre n'a pas d'importance.

II.2 Relation de Chasles

Propriété 12

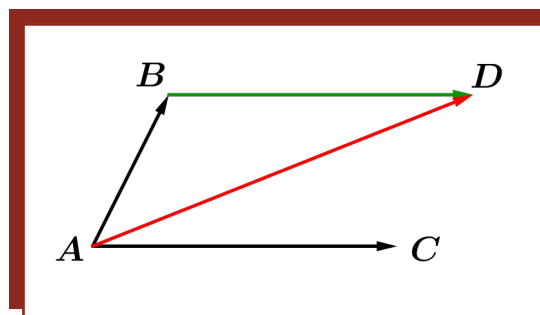
Pour tous points A , B et C , on a : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.



III.3 Règle du parallélogramme

Propriété 13

Soit A , B et C trois points distincts.
 $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.



Démonstration

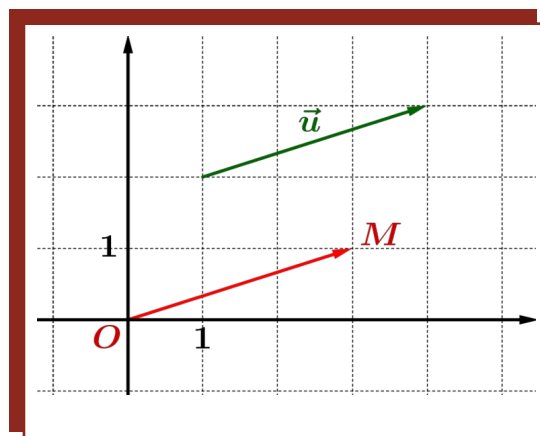
$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD} &\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD} \\ &\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{CD} \\ &\Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme} \end{aligned}$$

III. Vecteurs et coordonnées

III.1 Coordonnées d'un vecteur

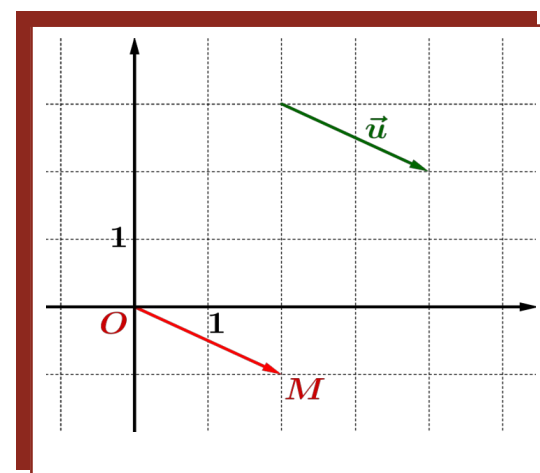
Définition 14

Dans un repère $(O; I, J)$, les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\vec{u} = \vec{OM}$. Si $M(x; y)$, on note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x; y)$.



Exemple

Dans le repère ci-contre, on a $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.



Remarque

Le repère $(O; I, J)$ se note aussi $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \vec{OI}$ et $\vec{j} = \vec{OJ}$.

Propriété 15

Deux vecteurs sont **égaux** si et seulement s'ils ont les **mêmes coordonnées** dans un repère.
Autrement dit, soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. $\vec{u}=\vec{v}$ si et seulement si $x=x'$ et $y=y'$.

III.2 Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ **Propriété 16**

Soit deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Exemple

Soit $A(4; -1)$ et $B(-2; 3)$. Alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 - 4 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

III.3 Coordonnées du vecteur somme**Propriété 17**

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

Exemple

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 5 + 3 \end{pmatrix} = \vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

III.4 Coordonnées du vecteur opposé**Propriété 18**

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors $-\vec{u}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

Exemple

Soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Alors $-\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

III.5 Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel**Propriété 19**

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et k un réel. Alors $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exemple

Soit le réel $k = -3$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors $-3\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \times 2 \\ -3 \times (-1) \end{pmatrix} = -3\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

IV. Norme d'un vecteur**Définition 20**

Soit un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. La norme du vecteur $\vec{u}$ est la longueur AB . On note $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$. Si $\|\vec{u}\| = 1$, le vecteur $\vec{u}$ est dit **unitaire**.

Propriété 21

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemple

Soit le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$.

Remarque

La norme de $\overrightarrow{AB}$ est $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Propriété 22

- $\|\overrightarrow{AB}\| = 0 \Leftrightarrow A = B$.
- Pour tout réel k et tout vecteur $\vec{u}$, $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

Exemple

Soit le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Alors $\|3\vec{u}\| = |3| \times \|\vec{u}\| = 3\sqrt{(-3)^2 + 7^2} = 3\sqrt{58}$.