

Chapitre 9

Primitives et équations différentielles

I. Équation différentielle $y' = f$ et primitives

I.1 Équation différentielle $y' = f$

Définition 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

- On dit qu'une fonction F est **solution de l'équation différentielle** $y' = f$ sur I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$.
- Résoudre sur I une équation différentielle $y' = f$, c'est trouver toutes les fonctions F dérivables sur I telles que $F' = f$.

Remarques

- La dérivée est associée à un taux de variation, quotient des variations de y sur les variations de x , d'où le terme différentiel.
- On peut être amené à utiliser l'écriture différentielle $y' = \frac{dy}{dx}$ ou $y' = \frac{dy}{dt}$.

Exemple

Soit (E) l'équation différentielle $y' = x^2$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^3}{3}$. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$, donc F est solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

I.2 Ensemble des primitives d'une fonction continue

Définition 2

Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur l'intervalle I telle que :

$$\text{Pour tout réel } x \in I, F'(x) = f(x)$$

Remarques

- D'après la définition, une primitive est toujours dérivable et donc continue.
- F est une primitive de f sur I si et seulement si F est solution de l'équation différentielle $y' = f$. Résoudre sur I l'équation $y' = f$ revient donc à déterminer toutes les primitives de f sur I .

Exemples

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$. La fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $F(x) = x^2$ est une primitive de f . En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2x$.

• Montrons que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x(\ln(x) - 1)$ est une primitive de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$.

La fonction F est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que composée de telles fonctions sur $]0; +\infty[$.

On a $F'(x) = \ln(x) - 1 + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) = f(x)$. F est donc une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Théorème 3

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I qui admet une primitive F sur I . Alors la fonction f **admet une infinité de primitives** sur I et toute primitive G de f sur I est définie par : $G(x) = F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration

• Soit la fonction G définie sur I par : $G(x) = F(x) + k$.

G est dérivable sur I en tant que somme de telles fonctions sur I .

On a pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) = f(x)$. G est donc une primitive de f sur I .

• Réciproquement, si G est une primitive de f sur I , alors $G' = f$.

D'où, pour tout $x \in I$, $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Si la dérivée de $G - F$ est nulle, alors $G - F$ est une fonction constante.

Donc pour tout $x \in I$, $G(x) - F(x) = k$, et donc $G(x) = F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Remarques

• On dit que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

• Les solutions de l'équation différentielle $y' = f$ sont donc toutes les fonctions de la forme $G = F + k$.

• Si F et $G = F + k$ sont deux primitives d'une même fonction f , la courbe représentative de G se déduit de celle de F par une translation de vecteur $k \vec{j}$.

Exemples

• Si la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2$ est une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$, alors la fonction G définie par $G(x) = x^2 + 3$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

• La fonction exponentielle est une primitive de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ car $(e^x)' = e^x$.

Les primitives de la fonction exponentielle sont toutes les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $F(x) = e^x + k$, où k est un réel.

Propriété 4

Soit f une fonction continue admettant une primitive sur un intervalle I . Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Autrement dit, l'équation différentielle $y' = f$ admet une unique solution F telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Soit F et G deux primitives de f sur I . On a donc $F(x) = G(x) + k$.

Si on impose $F(x_0) = y_0$, alors il existe un unique k tel que $y_0 = G(x_0) + k$ et donc $k = y_0 - G(x_0)$.

Remarques

- La condition $F(x_0)=y_0$ est parfois appelée **condition initiale** en référence à certaines situations rencontrées en physique.
- En cinétique (étude des mouvements), l'utilisation des conditions initiales est primordiale pour obtenir les équations du mouvement et par la suite la loi horaire.

Exemple

Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x$.
 Déterminons l'unique primitive F de f telle que $F(2)=-3$.

F est une primitive de f donc $F(x)=x^2+k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

$F(2)=-3 \Leftrightarrow 2^2+k=-3 \Leftrightarrow 4+k=-3 \Leftrightarrow k=-7$. Ainsi $F(x)=x^2-7$.

Théorème 5

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

II. Primitives et opérations**II.1 Primitives des fonctions usuelles**

On obtient des primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées.

Fonction f	Primitive F	Intervalle I
$f(x)=k$	$F(x)=kx$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)$	$]0; +\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^n}, n \geq 2$	$F(x)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	$\mathbb{R}$

Remarque

Toutes ces primitives sont déterminées à une constante près.

Exemples

• Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et est de la forme x^n avec $n=3$. Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{1}{4} x^4$.

• Soit f la fonction continue définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^4}$.

La fonction f est continue sur $]0; +\infty[$ et est de la forme $\frac{1}{x^n}$.

Donc une primitive de f sur $]0; +\infty[$ est la fonction F définie par $F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$.

Ainsi pour tout $x \in]0; +\infty[$, $F(x) = -\frac{1}{(4-1)x^{4-1}} = -\frac{1}{3x^3}$.

On pourrait aussi considérer que $f(x) = x^{-4}$ en appliquant la formule de la fonction puissance et on obtiendrait $F(x) = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} = \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3x^3}$.

II.2 Primitives de $f+g$ et de kf avec k un réel

Propriété 6

- Si F et G sont des primitives respectives des fonctions continues f et g sur un intervalle I , alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I .
- Si F est une primitive de la fonction continue f sur un intervalle I et si k est un réel, alors kF est une primitive de kf sur I .

Démonstration

• Soit F et G deux primitives respectives des fonctions f et g .

Alors $(F+G)' = F' + G' = f + g$. Ainsi $F+G$ est une primitive de $f+g$.

• Soit F une primitive de f et k un réel.

Alors $(kF)' = kF' = kf$. Ainsi kF est une primitive de kf .

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 8x$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et est une somme de fonctions de type x^n .

La fonction $x \rightarrow x^3$ admet comme primitive la fonction $x \rightarrow \frac{x^4}{4}$.

La fonction $x \rightarrow 8x$ admet comme primitive la fonction $x \rightarrow 4x^2$.

Ainsi une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 4x^2$.

II.3 Primitives des fonctions composées

Propriété 7 (hors programme)

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$.

La fonction composée $v \circ u$ est une primitive sur I de $u'(v' \circ u)$.

Démonstration

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$.

Alors $v \circ u$ est dérivable sur I et on a $(v \circ u)' = u'(v' \circ u)$. D'où le résultat.

Exemple

On souhaite résoudre l'équation différentielle (E): $y' = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$.

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de telles fonctions. Elle est alors continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout réel x , $f(x) = -\frac{1}{2} \times 2x \times \frac{-1}{(x^2 + 1)^2}$. f est donc de la forme $ku'(v' \circ u)$ avec :

$$k = -\frac{1}{2}, \quad u(x) = x^2 + 1, \quad u'(x) = 2x, \quad v(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Ainsi, les solutions de l'équation (E) sont toutes les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$F(x) = k v \circ u + C = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2 + 1} + C, \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

Les dérivées de certains types de fonctions se déduisent des résultats connus sur les dérivées.

On obtient donc le tableau des fonctions composées suivant, où u est une fonction dérivable sur un intervalle I de dérivée continue sur I .

Fonction f	Primitive F	Conditions
$u' u^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{u'}{u^n}, n \geq 2$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	Pour tout $x \in I, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u} = u' u^{-1}$	$\ln(u)$	Pour tout $x \in I, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Pour tout $x \in I, u(x) > 0$
$u' e^u$	e^u	

Remarques

- On pourra vérifier le résultat en dérivant la primitive obtenue et ainsi voir si l'on retombe sur f .
- Trouver une primitive n'est pas toujours chose facile. Des manipulations plus sophistiquées (par exemple pour les fonctions rationnelles ou les fonctions possédant des radicaux) sont parfois nécessaires pour déterminer une primitive. Parfois la primitive ne correspond à aucune fonction connue, elle est alors uniquement définie par une intégrale (par exemple une primitive de e^{-x^2}). Contrairement à la dérivation qui est toujours possible, la recherche de primitive s'avère donc parfois impossible.

Attention!

Bien adapter le coefficient lorsque cela est nécessaire pour obtenir une forme connue.

Exemples

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^3 + 6x^2 + x - 9$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet comme primitive la fonction F définie par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{5}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 9x$$

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x(x^2 - 1)^3$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ et est de la forme $u'u^n$ avec $u(x) = x^2 - 1$, $u'(x) = 2x$ et $n = 3$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f est la fonction F définie par $F(x) = \frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$.

$$\text{Ainsi pour tout } x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{u(x)^{3+1}}{3+1} = \frac{(x^2 - 1)^4}{4}.$$

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (7x - 2)^5$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{7}[7(7x - 2)^5]$.

La fonction f est de la forme $ku'u^n$ avec $u(x) = 7x - 2$, $u'(x) = 7$, $n = 5$ et $k = \frac{1}{7}$.

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = k \frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$.

$$\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{7} \times \frac{(7x - 2)^6}{5+1} = \frac{(7x - 2)^6}{42}.$$

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x+1}{(x^2 + 2x + 3)^2}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{2x+2}{(x^2 + 2x + 3)^2} \right]$.

La fonction f est de la forme $k \frac{u'}{u^n}$ avec $u(x) = x^2 + 2x + 3$, $u'(x) = 2x + 2$, $n = 2$ et $k = \frac{1}{2}$.

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = k \frac{-1}{(n-1)u(x)^{n-1}}$.

$$\text{Ainsi pour tout } x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{(2-1)(x^2 + 2x + 3)^{2-1}} = -\frac{1}{2(x^2 + 2x + 3)}.$$

• Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ par $f(x) = \frac{3}{3x-2}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ et est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 3x-2$ et $u'(x) = 3$.

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ est la fonction F définie par $F(x) = \ln(|u(x)|)$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$, $F(x) = \ln(|3x-2|)$.

• Soit la fonction f définie sur $\left] \frac{1}{5}; +\infty \right[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x-1}}$.

La fonction f est continue sur $\left] \frac{1}{5}; +\infty \right[$ et pour tout $x \in \left] \frac{1}{5}; +\infty \right[$, $f(x) = \frac{1}{5} \left[\frac{5}{\sqrt{5x-1}} \right]$.

La fonction f est de la forme $k \frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 5x-1$, $u'(x) = 5$ et $k = \frac{1}{5}$.

Donc une primitive de f sur $\left] \frac{1}{5}; +\infty \right[$ est la fonction F définie par $F(x) = k 2 \sqrt{u(x)}$.

Ainsi pour tout $x \in \left] \frac{1}{5}; +\infty \right[$, $F(x) = \frac{2}{5} \sqrt{5x-1}$.

• Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-x^3+2}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{3} \left[-3x^2 e^{-x^3+2} \right]$.

La fonction f est de la forme $ku'e^u$ avec $u(x) = x^3+2$, $u'(x) = -3x^2$ et $k = -\frac{1}{3}$.

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = k e^{u(x)}$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -\frac{1}{3} e^{-x^3+2}$.

III. Équations différentielles

III.1 Définition

Définition 8

- Une **équation différentielle** est une égalité reliant une fonction dérivable et ses dérivées successives, et éventuellement d'autres fonctions.
- Une **solution d'une équation différentielle** est une fonction dérivable qui vérifie cette égalité.

Remarques

- Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions vérifiant l'égalité.
- Une équation différentielle met en jeu une fonction et ses dérivées successives. Cependant, nous nous limiterons essentiellement dans ce chapitre à l'étude des **équations différentielles du premier ordre**, c'est-à-dire les équations différentielles reliant une fonction dérivable à sa dérivée première.
- De même que pour une dérivée première, on peut être amené à utiliser l'écriture différentielle

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{ou} \quad y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Exemples

- On considère l'équation différentielle $(E): y' = 2y$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$ est une solution de cette équation différentielle car $f'(x) = 2e^{2x} = 2f(x)$.
- On considère l'équation différentielle $(E'): y'' - y = 0$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$ est une solution de cette équation différentielle car $f''(x) = -e^{-x}$ et $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, donc $f''(x) - f(x) = 0$.

III.2 Équation différentielle $y' = ay$

Définition 9

Soit a un réel. L'équation différentielle $(E_0): y' = ay$ est appelée **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants**.

Remarques

- Cette équation différentielle peut aussi s'écrire $y' - ay = 0$.
- On dit aussi « sans second membre » au lieu de « homogène ».

Exemples

- L'équation différentielle $y' = 5y$ est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants car elle est de la forme $y' = ay$ avec $a = 5$.
- L'équation différentielle $2y' + 9y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants car elle est de la forme $y' = ay$ avec $a = -\frac{9}{2}$.

Théorème 10

Les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y' = ay$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.

Démonstration

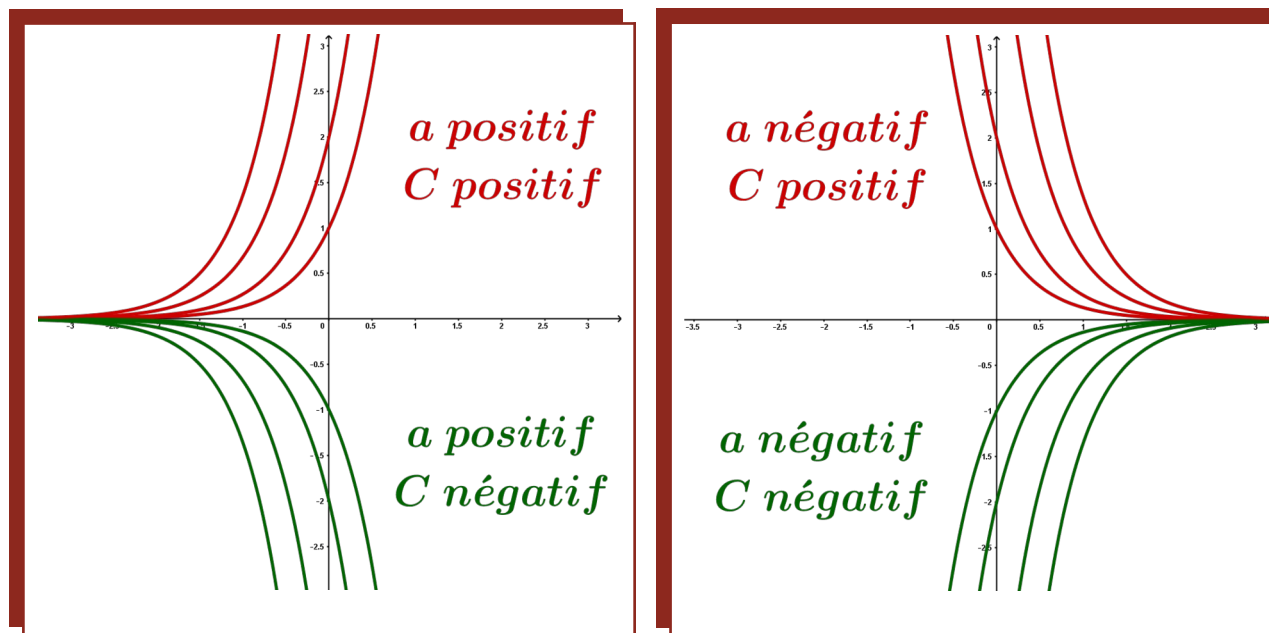
- Soit y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel. y est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de telles fonctions et pour tout réel x , $y'(x) = Ca e^{ax} = aCe^{ax} = ay(x)$. Ainsi y est solution de l'équation différentielle (E_0) .
- Réciproquement, soit y une solution de l'équation différentielle (E) .
Posons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = y(x)e^{-ax}$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de telles fonctions.
Pour tout réel x , $g'(x) = y'(x)e^{-ax} - y(x)ae^{-ax} = (y'(x) - ay(x))e^{-ax}$.
Or y est solution de (E_0) , donc $y'(x) - ay(x) = 0$ et donc $g'(x) = 0$.
 g est donc une fonction constante : il existe un réel C tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = C$.
Ainsi $g(x) = y(x)e^{-ax} \Leftrightarrow C = y(x)e^{-ax} \Leftrightarrow y(x) = Ce^{ax}$.

Exemple

L'équation différentielle $(E_0): y' = 2y$ admet comme solutions toutes les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = Ce^{2x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Allures des courbes

Les courbes des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ ont les allures suivantes :



Propriété 11

Soit $(E_0): y' = ay$ une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants et $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Il existe une unique solution y_0 de (E_0) telle que $y(x_0) = y_0$.

Démonstration

Soit y une solution de (E_0) . D'après le théorème précédent, y est de la forme $y(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel. Par hypothèse, $y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow Ce^{ax_0} = y_0 \Leftrightarrow C = \frac{y_0}{e^{ax_0}} \Leftrightarrow C = y_0 e^{-ax_0}$.

Ainsi, pour tout réel x , $y(x) = y_0 e^{-ax_0} e^{ax} = y_0 e^{a(x-x_0)}$ et cette solution est unique.

Exemple

On cherche à déterminer l'unique solution y de l'équation différentielle $(E_0): y' = 3y$ telle que $y(0) = 2$.

L'équation différentielle (E_0) admet comme solutions toutes les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = Ce^{3x}$. Or $y(0) = 2 \Leftrightarrow Ce^{3 \times 0} = 2 \Leftrightarrow C = 2$.

Ainsi, l'unique solution de (E_0) telle que $y(0) = 2$ est la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = 2e^{3x}$.

Propriété 12

Soit y_1 et y_2 deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, $(E_0): y' = ay$ une équation différentielle et k un réel. Si les fonctions y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle (E_0) , alors $y_1 + y_2$ et ky_1 sont aussi solutions de (E_0) .

Démonstration

Soit y_1 et y_2 deux solutions de l'équation différentielle $(E_0): y' = ay$ et k un réel.

Par définition, les fonctions y_1 et y_2 sont respectivement de la forme $C_1 e^{ax}$ et $C_2 e^{ax}$, où C_1 et C_2 sont des réels.

On a alors $(y_1 + y_2)(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{ax} = (C_1 + C_2) e^{ax} = C e^{ax}$, où $C = C_1 + C_2$.

De plus, on a $k y_1(x) = k C_1 e^{ax} = C' e^{ax}$, où $C' = k C_1$.

Ainsi $y_1 + y_2$ et $k y_1$ sont bien solutions de l'équation différentielle (E_0) .

Exemple

Soit l'équation différentielle $(E_0): 7y' - 2y = 0$.

Les fonctions $y_1(x) = 2e^{\frac{2}{7}x}$ et $y_2(x) = -5e^{\frac{2}{7}x}$ sont solutions de (E_0) .

Alors les fonctions $(y_1 + y_2)(x) = 2e^{\frac{2}{7}x} - 5e^{\frac{2}{7}x} = -3e^{\frac{2}{7}x}$ et $3y_1(x) = 6e^{\frac{2}{7}x}$ sont solutions de (E_0) .

III.3 Équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$

Définition 13

Soit a et b des réels tels que $a \neq 0$. L'équation différentielle $(E): y' = ay + b$ est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre**.

Remarque

Cette équation différentielle peut aussi s'écrire $y' - ay = b$.

Exemple

L'équation différentielle $y' = 2y - 3$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants car elle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 2$ et $b = -3$.

Théorème 14

Les solutions de l'équation différentielle $(E): y' = ay + b$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est un réel.

Démonstration

• Soit y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est un réel. y est dérivable sur $\mathbb{R}$

en tant que composée de telles fonctions et pour tout réel x , $y'(x) = Cae^{ax} = aCe^{ax} = ay(x) + b$.

Or $ay(x) + b = a\left(Ce^{ax} - \frac{b}{a}\right) + b = aCe^{ax} - b + b = aCe^{ax} = ay(x) + b$. Donc $y'(x) = ay(x) + b$.

Ainsi y est solution de l'équation différentielle (E) .

• Réciproquement, soit y une solution de l'équation différentielle (E) .

• On détermine une solution constante $\phi(x) = k$ de (E) , où k est un réel.

Alors ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\phi'(x)=0$.

Donc ϕ est solution de (E) sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \phi'(x)=a\phi(x)+b \Leftrightarrow 0=ak+b \Leftrightarrow k=-\frac{b}{a}$.

Ainsi $\phi(x)=-\frac{b}{a}$.

• y est solution de (E) si et seulement si pour tout réel x , $y'(x)=ay(x)+b$.

La fonction $y-\phi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de telles fonctions.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(y-\phi)(x)=y'(x)-\phi'(x)=ay(x)+b-0=ay(x)+b=a\left(y(x)+\frac{b}{a}\right)=a(y(x)-\phi(x))$.

Donc $y-\phi$ est solution de l'équation homogène associée $(E_0): y'=ay$.

• Réciproquement, $y-\phi$ est solution de (E_0) sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow (y-\phi)'(x)=a(y-\phi)(x)$
 $\Leftrightarrow y'(x)-\phi'(x)=ay(x)-a\phi(x)$
 $\Leftrightarrow y'(x)=ay(x)-a \times \left(-\frac{b}{a}\right)$
 $\Leftrightarrow y'(x)=ay(x)+b$

• Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si $y-\phi$ est solution de (E_0) .

• Les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \rightarrow Ce^{ax}$, où C est un réel.

Donc les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \rightarrow Ce^{ax}-\frac{b}{a}$, où C est un réel.

Exemples

• L'équation différentielle (E): $y'=3y+5$ admet comme solutions toutes les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x)=Ce^{3x}-\frac{5}{3}$, où $C \in \mathbb{R}$.

• On cherche à déterminer l'unique solution y de l'équation différentielle (E): $2y'+3y=2$ telle que $y(2)=-\frac{1}{3}$. L'équation différentielle (E) peut s'écrire de la forme $y'=-\frac{3}{2}y+1$.

L'équation (E) admet comme solutions toutes les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$y(x)=Ce^{-\frac{3}{2}x}-\frac{1}{3}=Ce^{-\frac{3}{2}x}+\frac{2}{3}.$$

$$\text{Or } y(2)=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow Ce^{-\frac{3}{2} \times 2}+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow Ce^{-3}=-1 \Leftrightarrow C=-\frac{1}{e^{-3}}=-e^3.$$

Ainsi l'unique solution de (E) telle que $y(2)=-\frac{1}{3}$ est la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x)=-e^3 e^{-\frac{3}{2}x}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-e^{3-\frac{3}{2}x}$$

III.4 Équation différentielle $y'=ay+f$ avec $a \neq 0$

Définition 15

Soit a un réel non nul et f une fonction continue. L'équation différentielle (E): $y'=ay+f$ est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre**.

Remarque

Cette équation différentielle peut aussi s'écrire $y' - ay = f$.

Exemple

L'équation différentielle $y' = y + x^2$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre car elle est de la forme $y' = ay + f$ avec $a = 1$ et $f(x) = x^2$.

Théorème 16

Soit ϕ une solution particulière de l'équation différentielle (E) : $y' = ay + f$.
Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = Ce^{ax} + \phi(x)$, où C est un réel.

Exemple

L'équation différentielle (E) : $y' = 3y + 5$ admet comme solutions toutes les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = Ce^{3x} - \frac{5}{3}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Propriété 17

Soit ϕ une solution particulière de l'équation différentielle (E) : $y' = ay + f$.
Alors y est une solution de (E) si et seulement si $y - \phi$ est une solution de l'équation homogène associée $(E_0) : y' = ay$.

Remarques

- La propriété est un cas particulier du principe de superposition.
- À l'aide d'une solution particulière de (E), on obtient toutes les solutions.

Méthode : Résolution de l'équation différentielle (E) : $y' = ay + f$

- On détermine une solution particulière ϕ de l'équation (E).
- On écrit l'équation homogène associée $(E_0) : y' = ay$ et ses solutions $x \mapsto Ce^{ax}$ où $C \in \mathbb{R}$.
- On détermine toutes les solutions de l'équation (E) en effectuant la somme des solutions de (E_0) et de ϕ .

Exemple

Soit l'équation différentielle (E) : $y' = 3y - 9x$.

- La fonction $\phi(x) = 3x + 1$ est une solution particulière de (E).
En effet, on a $\phi'(x) = 3$ et $3 \times (3x + 1) - 9x = 9x + 3 - 9x = 3$. Donc $\phi'(x) = 3\phi(x) - 9x$.
- L'équation homogène associée est $(E_0) : y' = 3y$. Les solutions de (E_0) sont tous les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{3x}$, où C est un réel.
- Ainsi, les solutions de l'équation différentielle (E) sont toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto y(x) + \phi(x)$, c'est-à-dire $x \mapsto Ce^{3x} + 3x + 1$.