

Chapitre 9

Dérivation

I. Tangente à une courbe

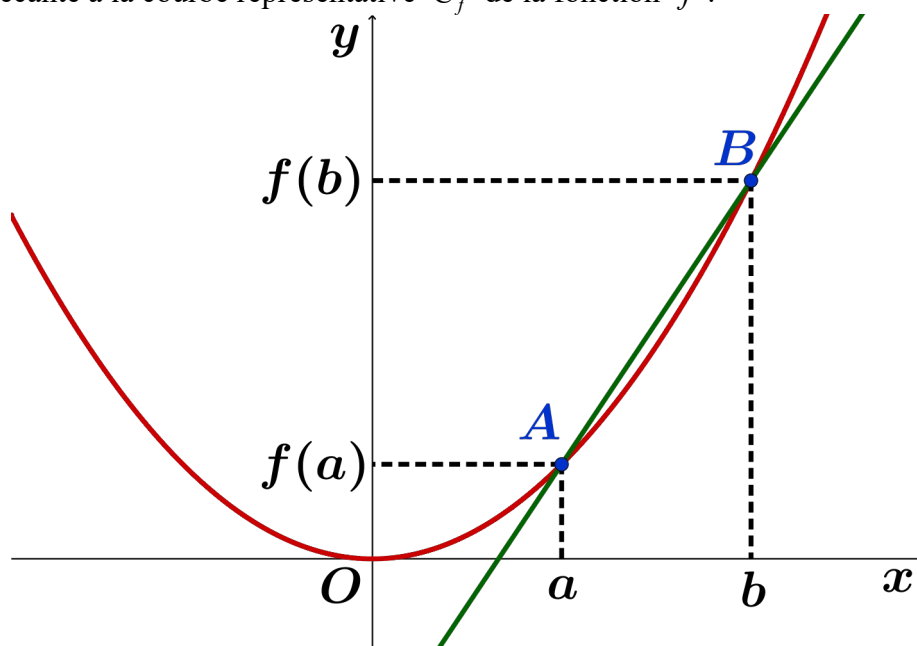
I.1 Sécante à une courbe

Définition 1

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative. On appelle **sécante** à la courbe C_f toute droite passant par deux points A et B distincts de cette courbe.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. La droite passant par les points $A(0;0)$ et $B(2;4)$ est sécante à la courbe représentative C_f de la fonction f .



Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant les réels a et b . Le **taux d'accroissement** de la fonction f entre a et b est le réel défini par le quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Son taux de variation entre 0 et 2 est :

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2^2 - 0^2}{2} = \frac{4 - 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Définition 3

Le **coefficient directeur** de la sécante (AB) est le taux d'accroissement de f entre a et b .

Exemple

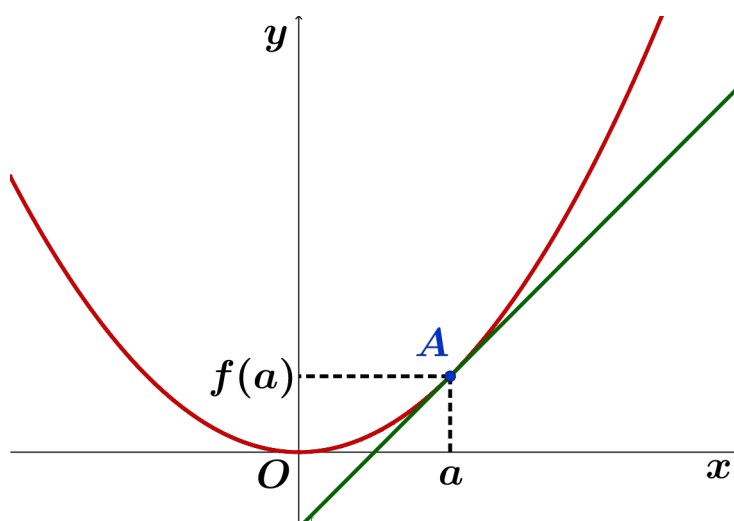
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et les points $A(0;0)$ et $B(2;4)$. Le coefficient directeur de la droite (AB) est alors $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 2$.

Remarque

Le coefficient directeur de la sécante (AB) a aussi pour formule $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

I.2 Tangente à une courbe**Définition 4**

On constate que, lorsque le point B se rapproche du point A, la sécante (AB) tend vers une droite particulière, nommée **tangente** à C_f au point A : aux alentours du point $A(a, f(a))$, elle est semblable à la courbe.

**Remarques**

- On dit que la tangente à C_f en A « frôle » la courbe autour du point A. C'est la position limite de la sécante quand le point B est confondu avec le point A.
- On nomme généralement T une tangente.
- Une tangente est une droite mais celle-ci ne peut jamais être verticale.

Définition 5

Lorsqu'elle existe, la tangente T à la courbe C_f au point A est **unique**.

II. Nombre dérivé

Définition 6

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , $a \in I$ et A un point de la courbe C_f d'abscisse a . On appelle **nombre dérivé** de la fonction f en a le coefficient directeur de la tangente T à C_f au point A et on le note $f'(a)$.

Remarque

$f'(a)$ se lit « f prime de a ».

Propriété 7

L'équation de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

$$T: y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On cherche l'équation de la tangente au point A d'abscisse $a = 1$.

On sait alors que la tangente à la courbe C_f au point A a pour équation :

$$T: y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$$

Avec un logiciel de calcul formel, on a obtenu $f'(1) = 2$. De plus $f(1) = 1^2 = 1$.

Donc $T: y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$.

Remarque

Une tangente étant une droite, son équation est de la même forme qu'une fonction affine, c'est-à-dire $y = mx + p$.

III. Fonction dérivée

Définition 8

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I .

On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à chaque x associe $f'(x)$.

Remarques

Toutes les fonctions usuelles vues en première sont dérivables sur leur domaine de définition.

IV. Dérivées des fonctions usuelles

Propriété 9

Les **fonctions constantes** de la forme $f(x)=k$ où $k \in \mathbb{R}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ont pour dérivée $f'(x)=0$.

Propriété 10

Les **fonctions affines** de la forme $f(x)=mx+p$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ont pour dérivée $f'(x)=m$.

Remarque

La dérivée d'une fonction affine est donc une fonction constante.

Propriété 11

La **fonction carrée** $f(x)=x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $f'(x)=2x$.

Propriété 12

La **fonction cube** $f(x)=x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $f'(x)=3x^2$.

V. Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 13

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .
La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)'=u'+v'$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x$. f est de la forme $u+v$ avec $u(x)=x^2$ et $v(x)=x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2x+1$.

Propriété 14

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel.
La fonction ku est dérivable sur I et $(ku)'=ku'$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $3x^4$. f est de la forme ku avec $k=3$ et $u(x)=x^4$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=3 \times 4x^3=12x^3$.

Propriété 15

Soit f une **fonction polynomiale** de la forme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ définie sur $\mathbb{R}$ avec n un entier naturel inférieur ou égal à 3 et $a_n \neq 0$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 2x - 1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 3 \times 5x^2 - 2 \times 7x + 2 = 15x^2 - 14x + 2$.

VI. Sens de variation d'une fonction**VI.1 Du sens de variation d'une fonction au signe de la dérivée****Théorème 16**

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si f est **croissante** sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$.
- Si f est **décroissante** sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$.
- Si f est **constante** sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 3$. f est une fonction affine strictement décroissante car son coefficient directeur est strictement négatif ($-4 < 0$). D'après le théorème précédent, on en conclut que la fonction dérivée de f est (strictement) négative.

Vérification : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -4$. f' est bien (strictement) négative.

VI.2 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction**Théorème 17**

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$, alors la fonction f est **croissante** sur I .
- Si pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$, alors la fonction f est **décroissante** sur I .
- Si pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$, alors la fonction f est **constante** sur I .
- Si f' est **strictement positive** (respectivement **strictement négative**) sur I , sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est **strictement croissante** (respectivement **strictement décroissante**) sur I .

Remarque

Dans de nombreux cas il sera nécessaire de dériver pour étudier les variations d'une fonction, car l'étude du signe de la dérivée sera plus simple que l'étude des variations de la fonction initiale.

Mais attention, ceci n'est pas toujours le cas !

Exemples

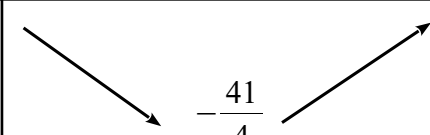
• Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+1$.
 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2$. Comme $f'(x)>0$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (nous pourrions ici simplement déterminer que f est strictement croissante car le coefficient directeur est strictement positif).

• Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3$.
 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2 \times 3x^2=6x^2$. Un carré est toujours positif (ou nul), la fonction dérivée f' est donc positive sur $\mathbb{R}$, sauf en 0 où elle s'annule.
 Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+3x-8$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2x+3$. Or $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$.

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
signe de f'	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Ainsi la fonction f est décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

Remarques

Une flèche dans le tableau de variation d'une fonction f indiquera dorénavant :

- la stricte croissance ou décroissance de f sur l'intervalle correspondant.
- la continuité (ou absence de rupture) de la courbe C_f sur cet intervalle.

Par la suite, on prendra l'habitude de construire un tableau de variations avec le signe de la dérivée puis les variations de la fonction f .

VII. Extremum d'une fonction**Théorème 18**

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I .

- On dit que le réel M est le **maximum** de f sur I , **atteint** en a , si $f(a)=M$ et si pour tout réel x de I , on a $f(x) \leq M$.
- On dit que le réel m est le **minimum** de f sur I , **atteint** en a , si $f(a)=m$ et si pour tout réel x de I , on a $f(x) \geq m$.
- Un **extremum** de f sur I est un **maximum** ou un **minimum** de f sur I .
- On dit que le réel L est un **maximum** (respectivement **minimum**) **local** de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I , tel que L est le maximum (respectivement minimum) de f sur J .

Remarques

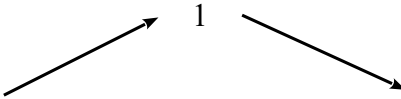
- Les pluriels de "minimum", "maximum" et "extremum" sont "minima", "maxima" et "extrema".
- Graphiquement, il s'agit pour le maximum du plus haut "sommet" de la courbe, et pour le minimum du plus bas "sommet" de la courbe.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2x + 4$. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -4 \Leftrightarrow x \leq 2$.

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de f'	+	0	-
$f(x)$			

Ainsi $f(2) = 1$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.