

## Dérivation

### Exercice 1

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 3$ .

1. Calculer les images par la fonction  $f$  de 1 et 4.

On a  $f(1) = 1^2 + 3 = 1 + 3 = 4$  et  $f(4) = 4^2 + 3 = 16 + 3 = 19$ .

2. Calculer le taux d'accroissement de  $f$  entre ceux deux valeurs.

On a  $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{19 - 4}{4 - 1} = \frac{15}{3} = 5$ .

### Exercice 2

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 4$ .

1. Calculer les images par la fonction  $f$  de  $-1$  et 2.

On a  $f(-1) = (-1)^3 - 4 = -1 - 4 = -5$  et  $f(2) = 2^3 - 4 = 8 - 4 = 4$ .

2. Calculer le taux d'accroissement de  $f$  entre ceux deux valeurs.

On a  $\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{4 - (-5)}{2 + 1} = \frac{4 + 5}{3} = \frac{9}{3} = 3$ .

### Exercice 3

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{x+7}$ .

1. Calculer les images par la fonction  $f$  de  $-2$  et 1.

On a  $f(-2) = \frac{1}{-2+7} = \frac{1}{5}$  et  $f(1) = \frac{1}{1+7} = \frac{1}{8}$ .

2. Calculer le taux d'accroissement de  $f$  entre ceux deux valeurs.

On a  $\frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{5}}{1 + 2} = \frac{\frac{5}{40} - \frac{8}{40}}{3} = \frac{-\frac{3}{40}}{3} = -\frac{3}{40} \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{40}$ .

### Exercice 4

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{2x+1}{x+6}$ .

1. Calculer les images par la fonction  $f$  de 2 et 3.

On a  $f(2) = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 6} = \frac{5}{8}$  et  $f(3) = \frac{2 \times 3 + 1}{3 + 6} = \frac{7}{9}$ .

2. Calculer le taux d'accroissement de  $f$  entre ceux deux valeurs.

On a  $\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{\frac{7}{9} - \frac{5}{8}}{1} = \frac{56}{72} - \frac{45}{72} = \frac{11}{72}$ .

### Exercice 5

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sqrt{x+2}$ .

1. Calculer les images par la fonction  $f$  de 0 et 5.

On a  $f(0) = \sqrt{0+2} = \sqrt{2}$  et  $f(5) = \sqrt{5+2} = \sqrt{7}$ .

2. Calculer le taux d'accroissement de  $f$  entre ceux deux valeurs.

On a  $\frac{f(5)-f(0)}{5-0} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$ .

**Exercice 6**

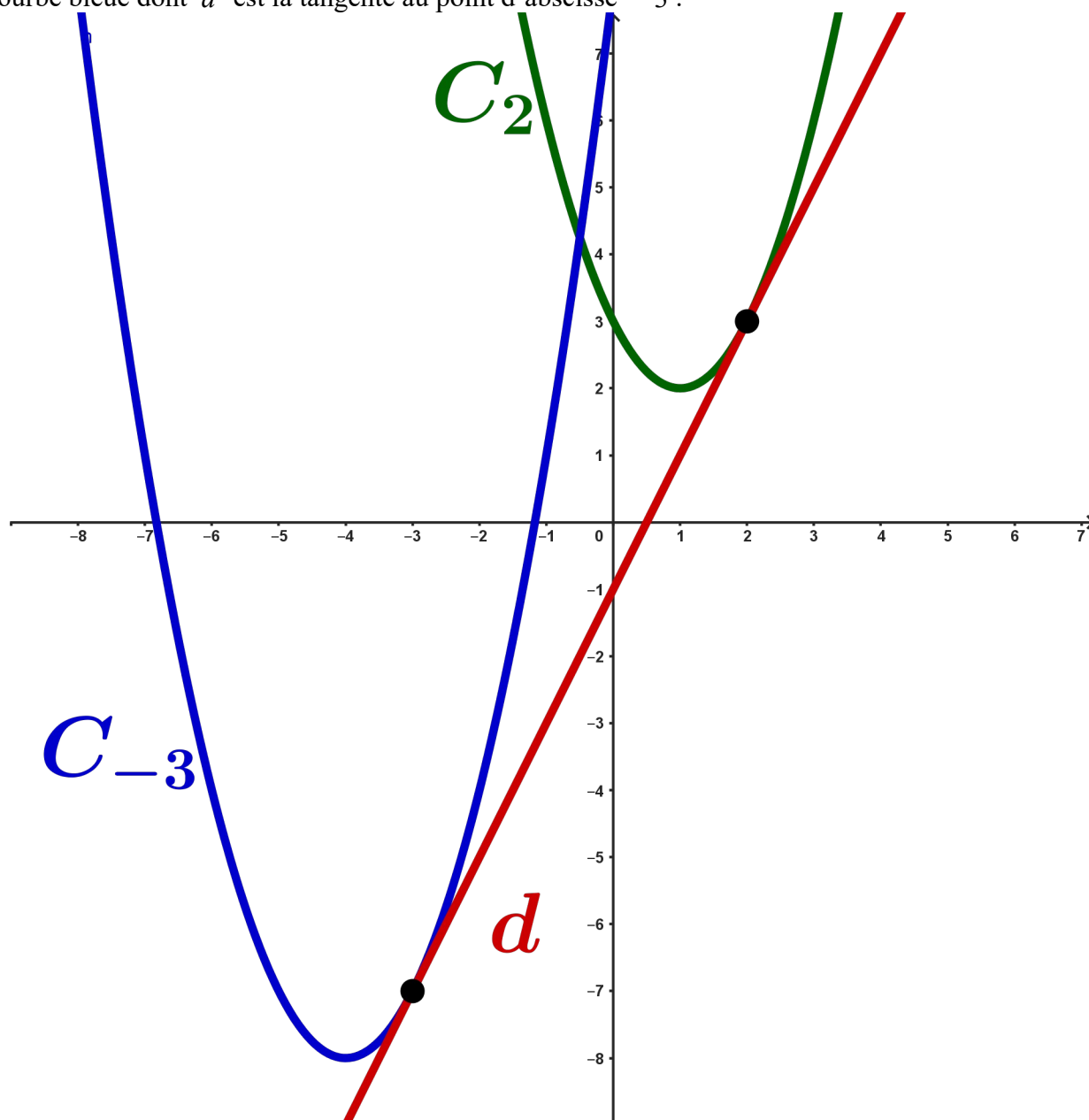
Soit la droite  $d$  d'équation  $y = 2x - 1$ .

1. Tracer la droite  $d$  dans un repère orthonormé.

2. Tracer la courbe d'une fonction dont la droite  $d$  est la tangente au point d'abscisse 2.

3. Tracer la courbe d'une fonction dont la droite  $d$  est la tangente au point d'abscisse  $-3$ .

$d$  est la droite rouge,  $C_2$  la courbe verte dont  $d$  est la tangente au point d'abscisse 2 et  $C_{-3}$  la courbe bleue dont  $d$  est la tangente au point d'abscisse  $-3$ .



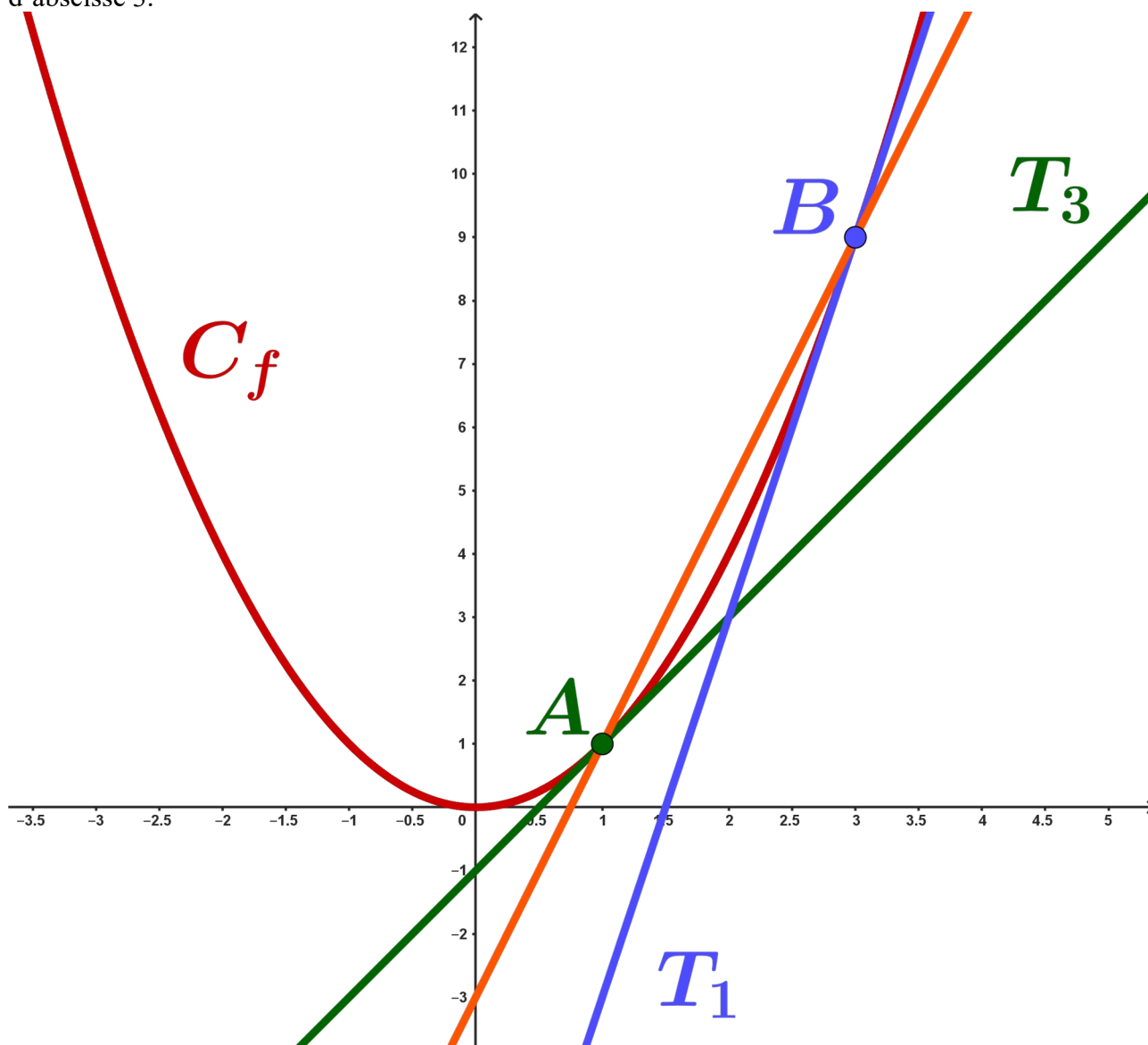
**Exercice 7**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ .

1. Tracer la courbe représentative  $C_f$  de  $f$  dans un repère orthonormé.
2. Tracer la sécante passant par les points  $A(1;1)$  et  $B(3;9)$ .
3. Tracer la tangente au point d'abscisse 1 ainsi que celle au point d'abscisse 3.

La droite orange est la sécante passant par les points  $A$  et  $B$ .

$T_1$  est la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 et  $T_2$  est la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.



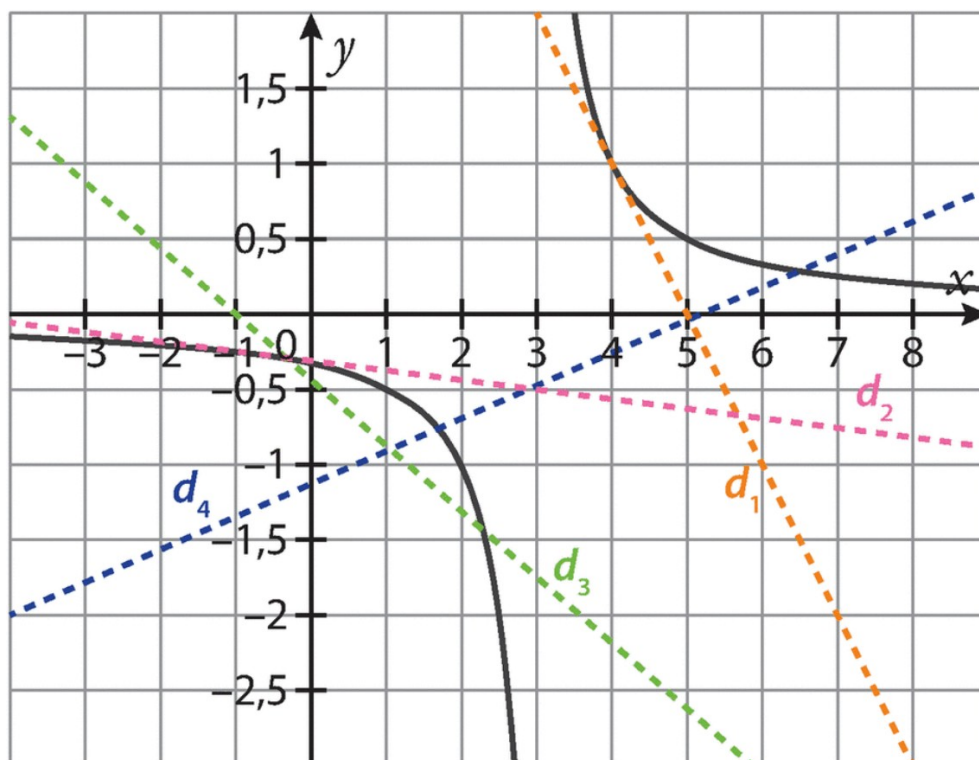
**Exercice 8**

Dans un repère orthonormé,  $d$  est une droite et  $A$  un point de cette droite. Quelle est la tangente au point  $A$  à la droite  $d$  ?

Une tangente est une droite. Or  $d$  est aussi une droite. Quand on va tracer la tangente à la droite  $d$  passant par le point  $A$ , alors la droite représentée va correspondre à la droite  $d$ . Ainsi, pour une fonction affine (qui est représentée par une droite), toutes ses tangentes sont confondues avec sa représentation graphique.

**Exercice 9**

On considère ci-dessous la courbe représentative  $C_f$  d'une fonction  $f$  et quatre droites  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  et  $d_4$ .



1. Quelles sont les droites qui sont sécantes à la courbe  $C_f$  ?

Une sécante à une courbe passe par deux points de cette courbe. Les droites  $d_3$  et  $d_4$  sont des sécantes à la courbe  $C_f$ .

2. Quelles sont celles qui sont des tangentes à la courbe  $C_f$  ? Préciser alors en quel point.

Une tangente à une courbe passe par un point de cette courbe et au voisinage de ce point. Les droites  $d_1$  et  $d_2$  sont des tangentes à la courbe  $C_f$ .

**Exercice 11**

On a tracé ci-dessous la courbe représentative  $C_f$  d'une fonction  $f$  et ses tangentes en  $A(-1,83; 5,22)$ ,  $B(1,83; 2,78)$  et  $C(3; 3,7)$ .

1. Lire graphiquement les nombres dérivés  $f'(-1,83)$  et  $f'(1,83)$ .

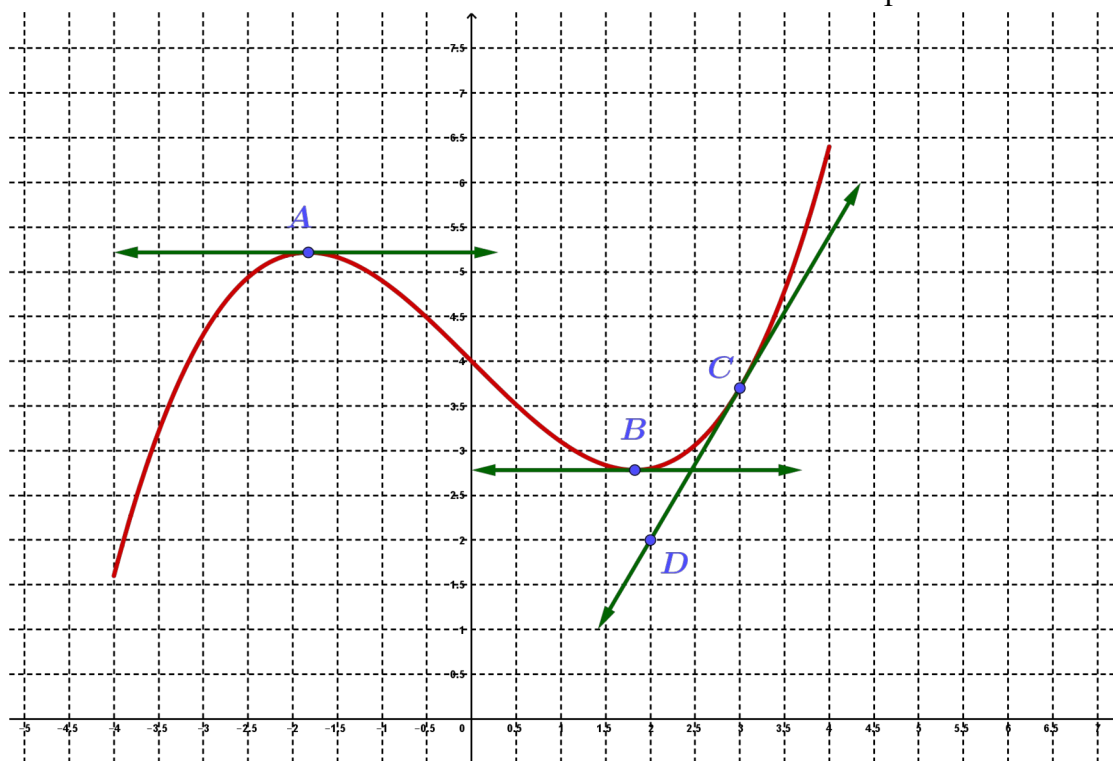
On a  $f'(1,83)=0$  car la tangente est horizontale et donc le coefficient directeur de cette droite, qui est aussi le nombre dérivé, est nul. De même,  $f'(-1,83)=0$ .

2. Lire graphiquement le nombre dérivé  $f'(3)$ .

On a  $C(3; 3,7)$  et  $D(2; 2)$ . D'où  $f'(3) = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{3,7 - 2}{3 - 2} = \frac{1,7}{1} = 1,7$ .

On peut aussi lire directement le coefficient directeur à l'aide du graphique en partant du point  $D$ .

On se déplace de 1,7 vers le haut puis de 1 vers la droite. D'où  $f'(3) = \frac{1,7}{1} = 1,7$ .



### Exercice 12

On considère la représentation graphique ci-contre d'une fonction  $f$  et la tangente au point A d'abscisse 2 de la courbe.

1. Déterminer graphiquement  $f(2)$ .

On a  $f(2)=2$ .

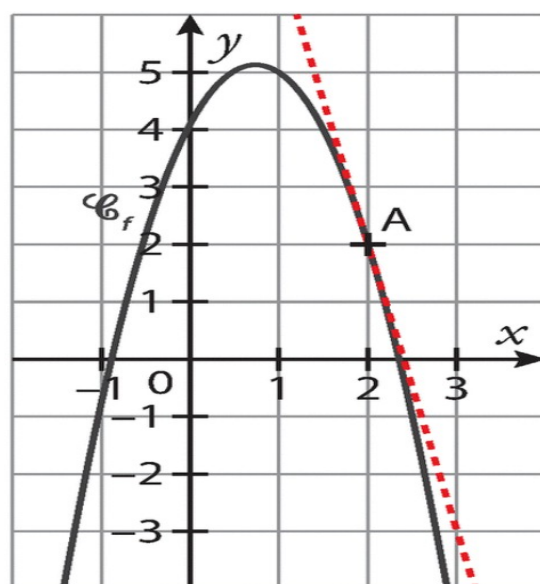
2. Déterminer graphiquement  $f'(2)$ .

$f'(2)$  est le coefficient directeur de la droite rouge en pointillée. On observe en partant du point A un déplacement de 5 vers le bas et de 1 vers la droite. Ainsi  $f'(2)=-\frac{5}{1}=-5$ .

### Remarque

On peut aussi calculer ce coefficient directeur en prenant les coordonnées des points A(2,2)

et B(3;-3) :  $f'(2)=\frac{-3-2}{3-2}=-\frac{5}{1}=-5$ .



### Exercice 13

On considère la représentation graphique ci-contre d'une fonction  $f$  et les tangentes aux points d'abscisses 1 et 2 de la courbe.

1. Déterminer graphiquement  $f(1)$  et  $f(2)$ .

On a  $f(1)=3$  et  $f(2)=-1$ .

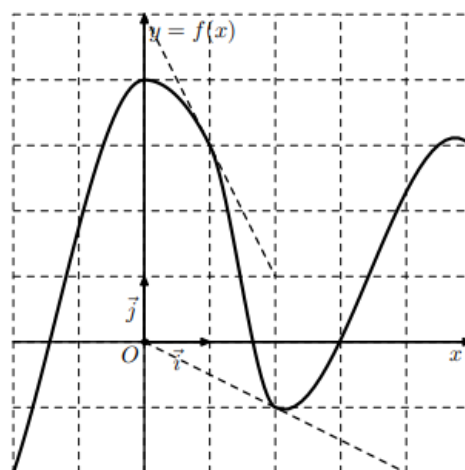
2. Déterminer graphiquement  $f'(1)$  et  $f'(2)$ .

On a  $f'(1)=-\frac{2}{1}=-2$  et  $f'(2)=-\frac{1}{2}$ .

3. Quel est le nombre dérivé en 0 ?

Le nombre dérivé en 0 est nul car la tangente au point d'abscisse 0 est horizontale et donc le coefficient directeur de la droite, est nul.

Ainsi  $f'(0)=0$ .



**Exercice 14**

On considère la représentation graphique ci-contre d'une fonction  $f$  dont on a tracé les tangentes aux points d'abscisses  $-1$  et  $1$ .

1. Déterminer graphiquement  $f(-1)$  et  $f(1)$ .

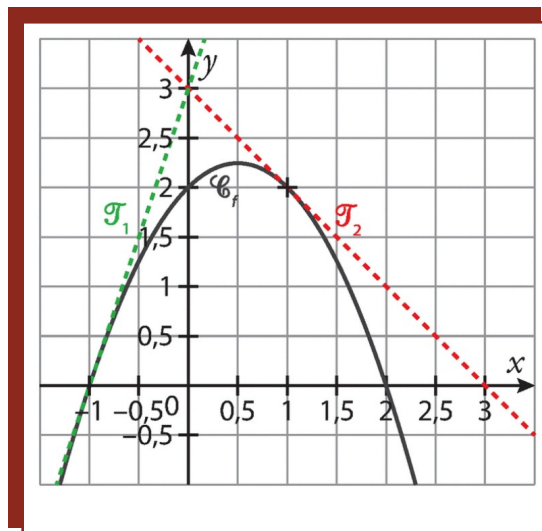
On a  $f(-1)=0$  et  $f(1)=2$ .

2. Déterminer graphiquement  $f'(-1)$  et  $f'(1)$ .

On a  $f'(-1)=\frac{3}{1}=3$  et  $f'(1)=\frac{-1}{1}=-1$ .

3. En quel point la tangente à la courbe a-t-elle un nombre dérivé nul ?

La seule tangente horizontale se situe au point d'abscisse  $0,5$ . Ainsi  $f'(0,5)=0$  car le coefficient directeur de la tangente est nul.

**Exercice 15**

1. Soit  $C_f$  la courbe représentative d'une fonction  $f$ . On sait que  $f(-1)=2$  et  $f'(-1)=-3$ . Écrire une équation de la tangente  $T$  à  $C_f$  au point d'abscisse  $-1$ .

L'équation de la tangente  $T$  à  $C_f$  au point d'abscisse  $-1$  est  $T: y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$ .

Or  $f'(-1)=-3$  et  $f(-1)=2$ . D'où  $T: y = -3(x+1)+2 = -3x-3+2 = -3x-1$ .

Ainsi  $T: y = -3x-1$ .

2. Soit  $C_f$  la courbe représentative d'une fonction  $f$ . On sait que  $f(2)=-3$  et  $f'(2)=1$ . Écrire une équation de la tangente  $T'$  à  $C_f$  au point d'abscisse  $2$ .

L'équation de la tangente  $T'$  à  $C_f$  au point d'abscisse  $2$  est  $T': y = f'(2)(x-2) + f(2)$ .

Or  $f'(2)=1$  et  $f(2)=-3$ . D'où  $T': y = 1(x-2)-3 = x-2-3 = x-5$ .

Ainsi  $T': y = x-5$ .

**Exercice 16**

1. Soit une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(4)=-1$  et  $f'(4)=2$ .

Déterminer l'équation réduite de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $4$ .

L'équation de la tangente  $T$  à  $C_f$  au point d'abscisse  $4$  est  $T: y = f'(4)(x-4) + f(4)$ .

Or  $f'(4)=2$  et  $f(4)=-1$ . D'où  $T: y = 2(x-4)-1 = 2x-8-1 = 2x-9$ .

Ainsi  $T: y = 2x-9$ .

2. Soit une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(-3)=7$  et  $f'(-3)=-4$ .

Déterminer l'équation réduite de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $-3$ .

L'équation de la tangente  $T'$  à  $C_f$  au point d'abscisse  $-3$  est  $T': y = f'(-3)(x - (-3)) + f(-3)$ .

Or  $f'(-3)=-4$  et  $f(-3)=7$ . D'où  $T': y = -4(x+3)+7 = -4x-12+7 = -4x-5$ .

Ainsi  $T': y = -4x-5$ .

**Exercice 17**

On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 + x$ . On donne le point  $A(1; 2)$  par lequel passe la tangente  $T$  ainsi que le point  $B(-2; 2)$  par lequel passe la tangente  $T'$ .

1. Déterminer graphiquement le nombre dérivé en 1.

On a  $f'(1) = \frac{3}{1} = 3$ .

2. Déterminer alors une équation de la tangente  $T$ .

$T: y = f'(1)(x-1) + f(1)$ .

Or  $f'(1) = 3$  et  $f(1) = 2$ .

D'où  $T: y = 3(x-1) + 2 = 3x - 3 + 2 = 3x - 1$ .

3. Déterminer graphiquement le nombre dérivé en  $-2$ .

On a  $f'(-2) = \frac{-3}{1} = -3$ .

4. Déterminer alors une équation de la tangente  $T'$ .

$T': y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2)$ . Or  $f'(-2) = -3$  et  $f(-2) = 2$ .

D'où  $T': y = -3(x+2) + 2 = -3x - 6 + 2 = -3x - 4$ .

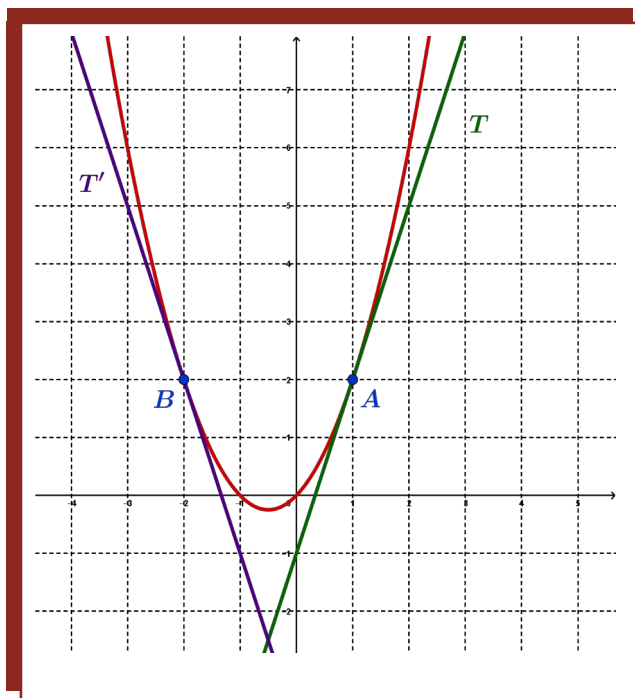
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre  $T$  et  $T'$ .

On commence par déterminer l'abscisse du point d'intersection entre les deux tangentes. Pour cela on résout l'équation  $3x - 1 = -3x - 4$ . On a  $3x - 1 = -3x - 4 \Leftrightarrow 6x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$ .

Ce résultat signifie qu'il n'y a qu'un seul point d'intersection à l'abscisse  $x = -\frac{1}{2}$ .

Ensuite, on détermine l'ordonnée de ce point d'intersection. Pour cela, on remplace  $x$  dans l'une des équations de tangente. On a  $y = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{3}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{5}{2}$ .

Ainsi le point d'intersection des tangentes  $T$  et  $T'$  a pour coordonnées  $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ .

**Exercice 20**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ .

1. Déterminer une équation de la tangente  $T$  au point d'abscisse 2.

On a  $T: y = f'(2)(x-2) + f(2)$ . À l'aide du graphique de la courbe  $C_f$  (on pourra utiliser la calculatrice), on trouve que  $f'(2) = 4$  et  $f(2) = 4$ .

D'où  $T: y = 4(x-2) + 4 = 4x - 8 + 4 = 4x - 4$ .

2. Déterminer une équation de la tangente  $T'$  au point d'abscisse 0.

On a  $T': y = f'(0)(x-0) + f(0)$ . Or  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 0$  car la tangente au point d'abscisse 0 est horizontale et donc le coefficient directeur est nul. D'où  $T': y = 0 \times x + 0 = 0$ .

**Exercice 21**

Soit  $f$  une fonction dont la courbe représentative  $C_f$  passe par le point  $A(2;3)$  et de nombre dérivé  $-4$  en  $x=2$ . Déterminer une équation de la tangente à  $C_f$  au point  $A$  puis la tracer.

On a  $T: y = f'(2)(x-2) + f(2)$ . Or  $f'(2) = -4$  et  $f(2) = 3$ .

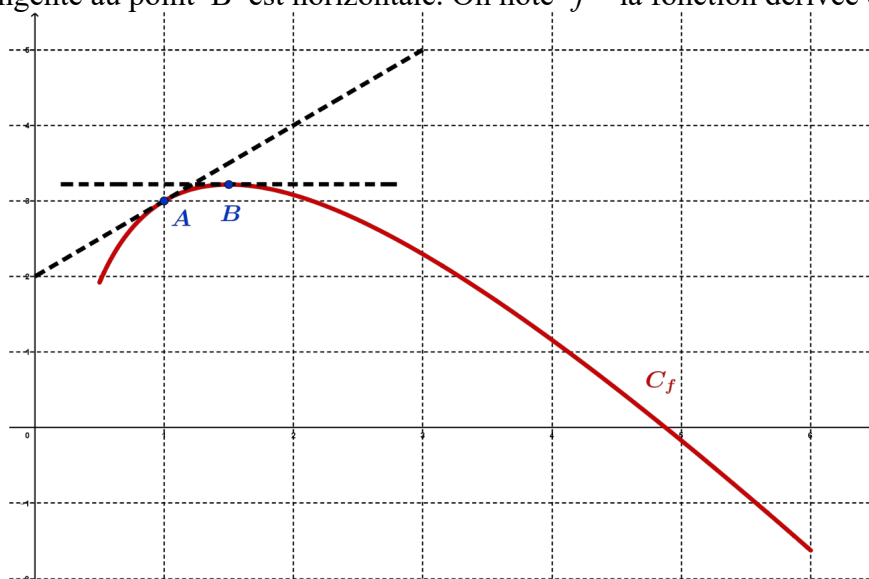
Ainsi  $T: y = -4(x-2) + 3 = -4x + 8 + 3 = -4x + 11$ .

Je vous laisse le soin de la tracer !

**Exercice 22**

La courbe  $C_f$  ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $[0;5;6]$ . Les points  $A(1;3)$  et  $B$  d'abscisse  $1,5$  sont sur la courbe  $C_f$ .

Les tangentes à la courbe  $C_f$  aux points  $A$  et  $B$  sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point  $B$  est horizontale. On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .



1. Que vaut  $f(1,5)$  ? Et  $f(1)$  ? (On arrondira les résultats si besoin).

On a  $f(1,5) \approx 3,2$  et  $f(1) = 3$ .

2. Déterminer  $f'(1,5)$ .

On a  $f'(1,5) = 0$  car la tangente est horizontale et donc le coefficient directeur est nul.

3. En déduire l'équation réduite de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $1,5$ .

On a  $T: y = f'(1,5)(x-1,5) + f(1,5) = 0 \times (x-1,5) + 3,2 = 3,2$ . Ainsi  $T: y = 3,2$ .

4. La tangente à la courbe  $C_f$  passant par  $A$  passe par le point de coordonnées  $(0;2)$ .

Déterminer une équation de cette tangente.

Le point  $A$  a pour coordonnées  $(1;3)$ . On cherche donc l'équation réduite de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse 1. On a  $T': y = f'(1)(x-1) + f(1)$ . Or  $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$  et  $f(1) = 3$ .

Ainsi  $T': y = 1(x-1) + 3 = x - 1 + 3 = x + 2$ .

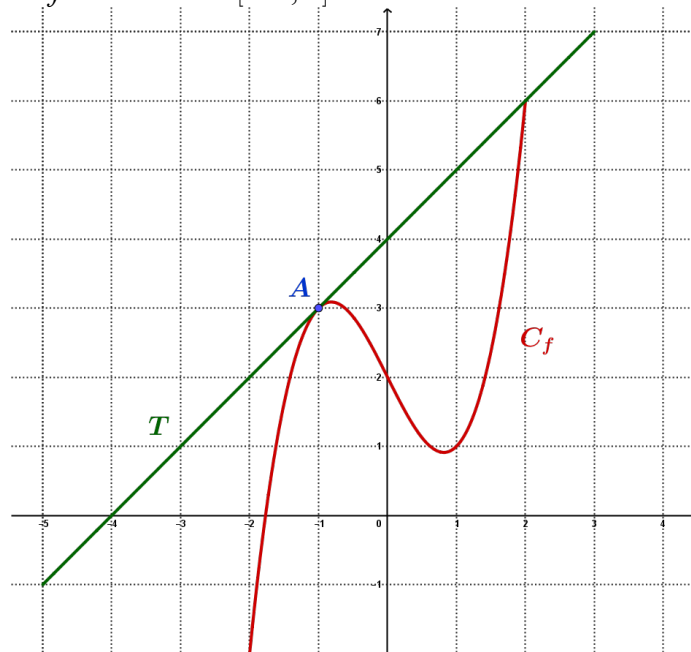
**Remarque**

On peut aussi directement établir que  $T: y = ax + b$  car une tangente étant une droite, son expression algébrique correspond à celle d'une fonction affine. On a  $b = 2$  qui est l'ordonnée à l'origine et

$a = \frac{1}{1} = 1$  qui est le coefficient directeur. Ainsi  $T: y = x + 2$ .

**Exercice 23**

La courbe d'une fonction  $f$  définie sur  $[-2; 2]$  est donnée ci-dessous. On donne  $A(-1; 3)$ .



Déterminer graphiquement l'équation réduite de la tangente  $T$  à  $C_f$  passant par  $A$ .

Le point  $A$  a pour coordonnées  $(-1; 3)$ . On cherche donc l'équation réduite de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $-1$ . On a  $T: y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$ .

Or  $f'(-1) = \frac{1}{1} = 1$  et  $f(-1) = 3$ . D'où  $T: y = 1(x + 1) + 3 = x + 1 + 3 = x + 4$ .

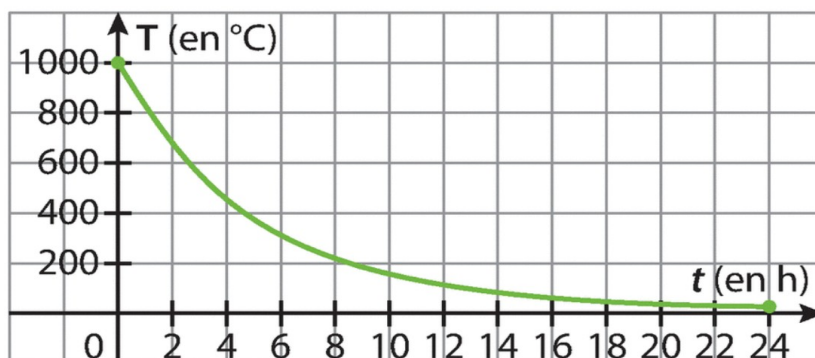
**Remarque**

On peut aussi directement établir que  $T: y = ax + b$  car une tangente étant une droite, son expression algébrique correspond à celle d'une fonction affine. On a  $b = 4$  qui est l'ordonnée à l'origine et

$a = \frac{1}{1} = 1$  qui est le coefficient directeur. Ainsi  $T: y = x + 4$ .

**Exercice 24**

La température d'un four, en degrés Celsius, à l'instant  $t$ , en heures, est donnée par la fonction représentée ci-dessous.



1. Estimer graphiquement la vitesse instantanée à  $t=6$  h.

La vitesse instantanée à  $t=6$  h correspond au nombre dérivé  $f'(6)$  (en valeur absolue car une vitesse est nécessairement positive). En traçant approximativement la tangente au point d'abscisse  $t=6$ , on remarque qu'elle passe à peu près aux points de coordonnées  $(6;300)$  et  $(12,0)$ .

$$\text{D'où } f'(6) = \frac{300-0}{6-12} = \frac{300}{-6} = -50.$$

Cela signifie qu'à 6h, il y a une diminution instantanée de  $50^\circ\text{C}$ .

2. Donner une estimation de la température moyenne sur les 14 premières heures.

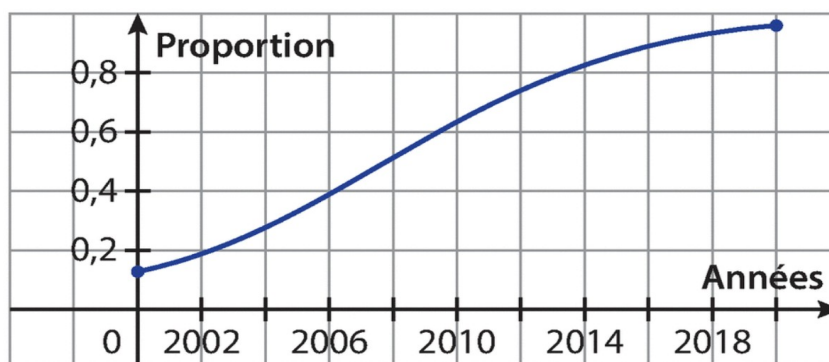
La vitesse moyenne correspond au taux d'accroissement de la sécante associée. Or Cette sécante passe par les points de coordonnées  $(0;1000)$  et  $(14;100)$ .

$$\text{D'où } \frac{f(0)-f(14)}{0-14} = \frac{1000-100}{-14} = \frac{900}{-14} = -\frac{450}{7} \approx -64.$$

Cela signifie qu'il y a une diminution moyenne de  $64^\circ\text{C}$  par heure.

**Exercice 25**

La courbe ci-dessous représente la proportion de ménages possédant une connexion fixe entre 2000 et 2020.



1. Estimer graphiquement la vitesse instantanée en 2008.

La vitesse instantanée en 2008 correspond au nombre dérivé  $f'(2008)$  (en valeur absolue car une vitesse est nécessairement positive). En traçant approximativement la tangente au point d'abscisse 2008, on remarque qu'elle passe à peu près aux points de coordonnées  $(2002;0,2)$  et  $(2015;1)$ .

$$\text{D'où } f'(2008) = \frac{2015-2002}{1-0,2} = \frac{13}{0,8} = 16,25.$$

Cela signifie qu'en 2008, il y a une augmentation instantanée de 16,25 ménages possédant une connexion fixe.

2. Comparer la vitesse de croissance avant 2014 et après 2014.

Toutes les tangentes à la courbe possèdent un coefficient directeur positif, donc il y a une croissance entre 2000 et 2019.

Cependant, les tangentes entre 2000 et 2014 semblent de plus en plus « montante », ce qui se traduit par un coefficient directeur de plus en plus grand. À l'inverse, entre 2014 et 2019, les tangentes sont de moins en moins « montante », ce qui signifie un coefficient directeur positif mais qui diminue.

Ainsi, la vitesse de croissance avant 2014 est plus importante que celle après 2014.

### Exercice 26

Une entreprise fabrique et commercialise des cahiers de 96 pages de dimensions  $24 \times 32 \text{ cm}$ .

On note  $x$  le nombre de cahiers produits et  $C(x)$  le coût de production, en euro, de ces  $x$  cahiers.

Un audit de l'entreprise a permis d'estimer que  $C(x) = 3 \times 10^{-9} \times x^3 - 5,1 \times 10^{-5} \times x^2 + 2,1x$ .

1. a. Calculer le coût de production de 10000 cahiers.

$$C(10000) = 3 \times 10^{-9} \times 10000^3 - 5,1 \times 10^{-5} \times 10000^2 + 2,1 \times 10000 = 3000 - 5100 + 21000 = 18900.$$

Ainsi le coût de production de 10000 cahiers est de 18900€.

b. En déduire le coût moyen de production d'un seul cahier sur ces 10000 cahiers.

$\frac{C(x)}{x}$  correspond au coût moyen de production d'un cahier parmi  $x$  cahiers.

$$\text{Alors } \frac{C(10000)}{10000} = \frac{18900}{10000} = 1,89.$$

Ainsi le coût moyen de production d'un seul cahier sur ces 10000 cahiers est de 1,89€.

2. On appelle coût marginal de  $x$  cahiers produits la différence  $C(x+1) - C(x)$ .

Parmi les choix suivants, quel est celui qui interprète le mieux le coût marginal ?

- Le coût de production de  $x$  cahiers
- Le coût de production d'un cahier
- La variation du coût de production induite par la production d'un cahier supplémentaire
- Le bénéfice de l'entreprise

Le coût marginal correspond à la variation du coût de production induite par la production d'un cahier supplémentaire. En effet,  $C(x+1) - C(x)$  correspond au taux d'accroissement car il est divisé par  $x+1 - x = 1$ .

3. Calculer et interpréter le coût marginal lorsque  $x = 10000$ .

$$\begin{aligned} \text{On a } C(10000+1) - C(10000) &= C(10001) - C(10000) \\ &= 3 \times 10^{-9} \times 10001^3 - 5,1 \times 10^{-5} \times 10001^2 + 2,1 \times 10001 - 18900 \\ &= 18901,98 - 18900 \\ &= 1,98 \end{aligned}$$

Cela signifie que le coût de production d'un cahier supplémentaire par rapport aux 10000 initiaux sera de 1,98€. Autrement dit, la production de ce dernier cahier coûtera 1,98€ au lieu de 1,89€ pour le cahier précédent.

4. a. Comparer le coût moyen de production obtenu à la question 1 et le coût marginal obtenu à la question 3 pour  $x = 10000$ .

Le coût moyen de production d'un seul cahier sur 10000 cahiers est de 1,89€.

Le coût marginal de 10000 cahiers est de 1,98€.

Ainsi le coût marginal est légèrement plus élevé de 9 centimes.

b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Cela signifie que la production d'un cahier supplémentaire est plus élevée. Ainsi, la production du dernier cahier est plus coûteuse pour l'entreprise que la production du cahier précédent. Il faut donc y réfléchir à deux fois si l'investissement est intéressant.

**Exercice 27**

L'énergie électrique en joules ( J ), consommée par un radiateur de puissance 2000 W lorsqu'il fonctionne  $t$  secondes est donnée par  $E(t) = 2000t$ .

1. Calculer  $E(t+1) - E(t)$ . Interpréter cette différence dans le contexte de la situation.

Quelle valeur retrouve-t-on ?

$$E(t+1) - E(t) = 2000(t+1) - 2000t = 2000t + 2000 - 2000t = 2000.$$

Cette différence correspond au nombre de Watt consommés en plus par seconde, autrement dit à la variation de l'énergie électrique entre deux secondes successives. On retrouve le taux d'accroissement.

2. Expliquer pourquoi  $E'(t) = 2000$ .

On a  $E(t) = 2000t$  qui correspond à une fonction affine (même linéaire). Elle donc représentée par une droite dans un repère. Or toutes les tangentes à une courbe représentant une fonction affine sont confondues avec sa droite représentative. Autrement dit l'équation réduite de toutes ses tangentes est  $T: y = 2000t$ . Comme le coefficient directeur de cette droite est 2000, alors son nombre dérivé est  $E'(a) = 2000$ . Ceci étant vrai pour tout réel  $t$  positif, alors  $E'(t) = 2000t$ .

**Exercice 28**

La concentration d'un médicament dans le sang (en mg/L) est donnée par une fonction  $C$  représentée en fonction du temps  $t$  (en heure) par la courbe suivante.



1. Quelle est la vitesse instantanée de l'évolution de la concentration au départ ? Après 8h ?

On cherche le nombre dérivé à  $t=0$  puis à  $t=8$ . Par lecture graphique, on a  $C'(0) = 0,5$  (la tangente passe approximativement par les points  $A(0;2)$  et  $B(2;3)$ ) et  $C'(8) = -0,2$  (la tangente passe approximativement par les points  $C(3;3)$  et  $D(13;1)$ ).

2. Pour quelle valeur de  $t$  la vitesse d'évolution de la concentration est-elle nulle ?

La seule tangente horizontale se situe au point d'abscisse  $t=3$ . Autrement dit, la vitesse d'évolution de la concentration est nulle à 3 heures.

3. Sur quel intervalle  $C'(t) > 0$  ?

Les tangentes sont « montantes » des instants  $t=0$  à  $t=3$ , puis « descendantes » ensuite jusqu'à l'instant  $t=24$ . Comme  $C'(t)$  correspond aux nombres dérivés, alors  $C'(t) > 0$  pour  $t$  compris entre 0 et 3 (3 étant exclu).

**Exercice 29**

On donne la courbe représentant la distance parcourue par une voiture en fonction du temps. La balise verte placée au 20<sup>e</sup> km représente un radar mobile.

1. Donner une valeur approchée du nombre dérivé à l'instant où la voiture passe devant le radar.

On obtient approximativement un nombre dérivé égal à 2 (la tangente passe approximativement par les points A(5;5) et B(25;45)).

2. En déduire la vitesse instantanée de la voiture en  $km/h$ .

La voiture roule à 2  $km$  par minute. Or il y a 60 minutes dans une heure, d'où  $2 \times 60 = 120$ .

Ainsi la voiture roule à 120  $km/h$ .

3. La limitation de vitesse étant de 90  $km/h$ , l'automobiliste se fera-t-il flasher ?

Il se fera nécessairement flasher car il est à 30  $km/h$  au-dessus de la vitesse autorisée.

4. La gendarmerie décide de changer son radar mobile pour un radar tronçon entre les kilomètres 20 et 50.

a. À quels instants, approximativement, la voiture passe-t-elle devant chacun des radars ?

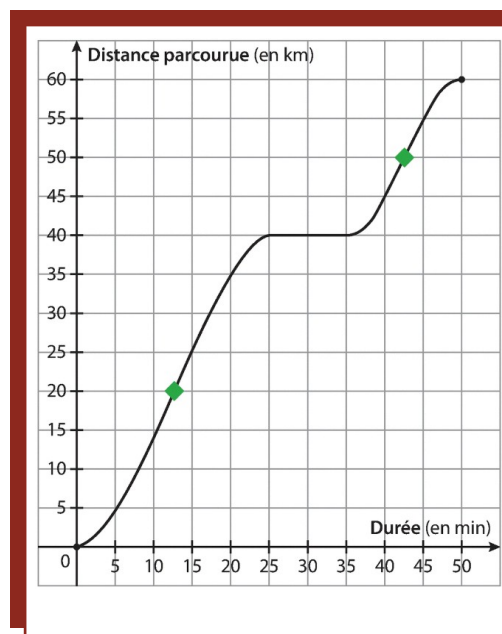
La voiture passe devant ces radars au bout de 12 minutes et demie ainsi que 42 minutes et demie.

b. En déduire la vitesse moyenne de la voiture sur ce tronçon.

La voiture a roulé  $50 - 20 = 30$  kilomètres pendant  $42,5 - 12,5 = 30$  minutes. Elle a donc roulé à 30  $km$  pendant 30 minutes. Or  $30 \times 2 = 60$ . Ceci signifie que la voiture avait une vitesse de 60  $km/h$ .

c. L'automobiliste est-il en excès de vitesse ?

L'automobiliste ne se fera pas flasher car il roule en moyenne 30  $km/h$  en dessous de la vitesse autorisée.

**Exercice 30**

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de  $f$ , sa dérivée  $f'$  et l'ensemble de dérivabilité de  $f$ .

1.  $f(x) = 4$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 0$ .

2.  $f(x) = 2x$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2$ .

3.  $f(x) = -6x + 1$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = -6$ .

4.  $f(x) = \frac{3}{2}x - 4$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{3}{2}$ .

5.  $f(x) = x^2$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2x$ .

6.  $f(x) = x^3$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 3x^2$ .

**Exercice 31**

Dans chacun des cas, déterminer le nombre dérivé en  $x = -4$  puis en  $x = 0,01$ .

1.  $f(x) = -4$ .

La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 0$ .

Ainsi  $f'(-4) = 0$  et  $f'(0,01) = 0$ .

2.  $g(x) = -3x + 7$ .

La fonction  $g$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $g'(x) = -3$ .

Ainsi  $g'(-4) = -3$  et  $g'(0,01) = -3$ .

3.  $h(x) = x^2$ .

La fonction  $h$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h'(x) = 2x$ .

Ainsi  $h'(-4) = 2 \times (-4) = -8$  et  $h'(0,01) = 2 \times 0,01 = 0,02$ .

### Exercice 32

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de  $f$ , sa dérivée  $f'$  et l'ensemble de dérivabilité de  $f$ .

1.  $f(x) = x^2 + 5x$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de telles fonctions sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2x + 5$ .

2.  $f(x) = -9x - 4$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction affine. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = -9$ .

3.  $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de telles fonctions sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2 \times 3x - 4 = 6x - 4$ .

4.  $f(x) = x^2 + 1$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de telles fonctions sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2x$ .

5.  $f(x) = x^2 + x + 4$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de telles fonctions sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2x + 1$ .

6.  $f(x) = x^3 - x$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de telles fonctions sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 1$ .

7.  $f(x) = 2x^2 + 3$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de telles fonctions sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2 \times 2x = 4x$ .

8.  $f(x) = 3x^5 + x^2$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de telles fonctions sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 5 \times 3x^4 + 2x = 15x^4 + 2x$ .

9.  $f(x) = \frac{x^2}{4} + 2x + 5$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de telles fonctions sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2 \times \frac{1}{4}x + 2 = \frac{1}{2}x + 2$ .

10.  $f(x) = -x^3 + \sqrt{2}x^2 + 4x$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de telles fonctions sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = -3x^2 + 2\sqrt{2}x + 4$ .

11.  $f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - 5x}{4}$ . On a  $f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - 5x}{4} = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x$ .

La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de telles fonctions sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 4 \times \frac{1}{4}x^3 + 2 \times \frac{3}{4}x - \frac{5}{4} = x^3 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$ .

12.  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de telles fonctions sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2 \times \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$ .

13.  $f(x) = x^5 - 2x^3 + 9x^2 + 4$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de telles fonctions sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 5x^4 - 3 \times 2x^2 + 2 \times 9x = 5x^4 - 6x^2 + 18x$ .

14.  $f(x) = -2x^7 + 5x^4 + 5x^2 - 8$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de telles fonctions sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = -7 \times 2x^6 + 4 \times 5x^3 + 2 \times 5x = -14x^6 + 20x^3 + 10x$ .

15.  $f(x) = \frac{4x-1}{3}$ . On a  $f(x) = 4x - 13 = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de telles fonctions sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{4}{3}$ .

### Exercice 33

Dans chacun des cas, donner le signe de la fonction dérivée  $f'$ .

1.  $f(x) = 2x - 1$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction affine. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2$ . Ainsi, la fonction dérivée  $f'$  est strictement positive.

2.  $g(x) = x^2$ . La fonction carrée est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que polynôme.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2x$ . Or  $2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ .

Ainsi, la fonction dérivée  $f'$  est négative sur  $]-\infty; 0]$  et positive sur  $[0; +\infty[$ .

### Exercice 34

Soit la fonction  $g$  définie par  $g(x) = x^2 - 5x + 1$ .

1. Donner l'ensemble de définition de  $g$ .

La fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  en tant que polynôme.

2. Calculer la dérivée de  $g$ .

La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que polynôme. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = 2x - 5$ .

3. Étudier le signe de  $g'$ .

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}.$$

Ainsi, la fonction dérivée  $g'$  est négative sur  $]-\infty; \frac{5}{2}]$  et positive sur  $[\frac{5}{2}; +\infty[$ .

4. Déduisez-en le sens de variations de  $g$ .

La fonction  $g$  est décroissante sur  $]-\infty; \frac{5}{2}]$  et croissante sur  $[\frac{5}{2}; +\infty[$ .

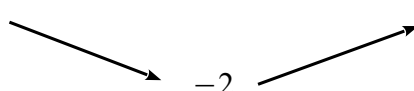
### Exercice 35

Étudier les variations des fonctions suivantes définies sur  $\mathbb{R}$ .

1.  $f(x) = x^2 - 2x - 1$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que polynôme.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$ .  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ .

On en déduit le tableau suivant :

| $x$           | $-\infty$                                                                            | 1 | $+\infty$ |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------|
| signe de $f'$ | –                                                                                    | 0 | +         |
| $f(x)$        |  |   |           |

On a  $f(1) = 1^2 - 2 \times 1 - 1 = -2$ .

2.  $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que polynôme.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 6x + 2 = 2(3x + 1)$ .

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(3x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}.$$

On en déduit le tableau suivant :

|               |           |                |           |
|---------------|-----------|----------------|-----------|
| $x$           | $-\infty$ | $-\frac{1}{3}$ | $+\infty$ |
| signe de $f'$ | $-$       | $0$            | $+$       |
| $f(x)$        |           |                |           |

On a  $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{2}{3}$ .

3.  $f(x) = x^3 + 3x$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que polynôme.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $3 > 0$  et  $x^2 + 1 > 0$ . Donc  $f'(x) > 0$ .

Ainsi la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

4.  $f(x) = x^3 + 3x^2$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que polynôme.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$ .

On a  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$  ou  $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = -2$ .

On en déduit le tableau suivant :

|               |           |      |     |           |     |
|---------------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$           | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $+\infty$ |     |
| $3x$          | $-$       | $-$  | $0$ | $+$       |     |
| $x+6$         | $-$       | $0$  | $+$ | $+$       |     |
| signe de $f'$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |
| $f(x)$        |           |      |     |           |     |

On a  $f(-6) = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 = -8 + 12 = 4$  et  $f(0) = 0^3 - 3 \times 0^2 = 0$ .

5.  $f(x) = x^4 + 5$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que polynôme.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 4x^3$ .  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ .

On en déduit le tableau suivant :

|               |           |     |           |
|---------------|-----------|-----|-----------|
| $x$           | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| signe de $f'$ | $-$       | $0$ | $+$       |
| $f(x)$        |           |     |           |

On a  $f(0) = 0^4 + 5 = 5$ .

6.  $f(x) = x^5 + 3x^3$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que polynôme.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 = x^2(5x^2 + 9)$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 \geq 0$  et  $5x^2 + 9 > 0$ . Donc  $f'(x) \geq 0$ .

Ainsi la fonction  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 36**

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition, la dérivée et l'ensemble de dérivabilité de la fonction  $f$ . Vous donnerez ensuite ses variations.

1.  $f(x) = x^3 + 3x$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que polynôme.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $3 > 0$  et  $x^2 + 1 > 0$ . Donc  $f'(x) > 0$ .

Ainsi la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2.  $f(x) = x^3 - 3x^2$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que polynôme.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ .

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$  ou  $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 2$ .

On en déduit le tableau suivant :

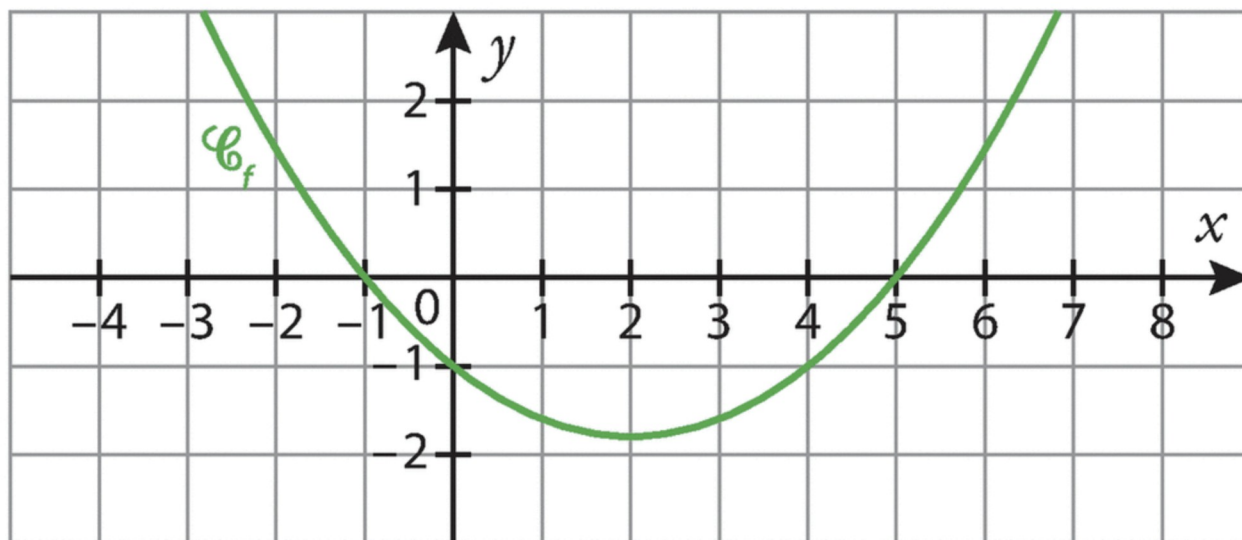
| $x$           | $-\infty$                                                                                                                                                                                                                   | 0 | 2 | $+\infty$ |   |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|-----------|---|
| $3x$          | —                                                                                                                                                                                                                           | 0 | + | +         |   |
| $x-2$         | —                                                                                                                                                                                                                           | — | 0 | +         |   |
| signe de $f'$ | +                                                                                                                                                                                                                           | 0 | — | 0         | + |
| $f(x)$        | <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"><div style="text-align: center;">↗<br/>0</div><div style="text-align: center;">↘<br/>-4</div><div style="text-align: center;">↗</div></div> |   |   |           |   |

On a  $f(0) = 0^3 - 3 \times 0^2 = 0$  et  $f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 = 8 - 12 = -4$ .

**Exercice 37**

On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Décrire les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .



La fonction  $f$  est croissante (respectivement décroissante) si sa dérivée  $f'$  est positive (respectivement négative).

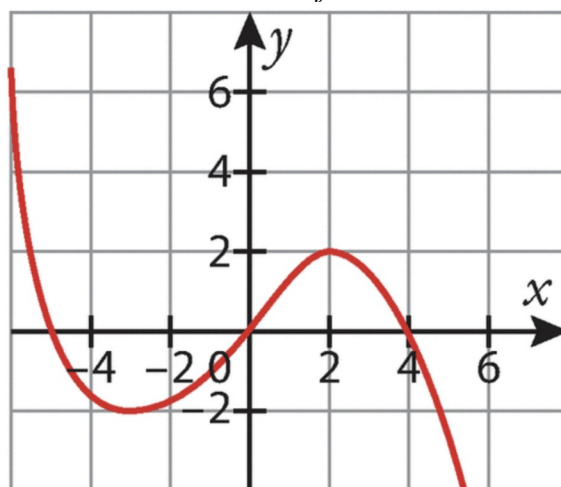
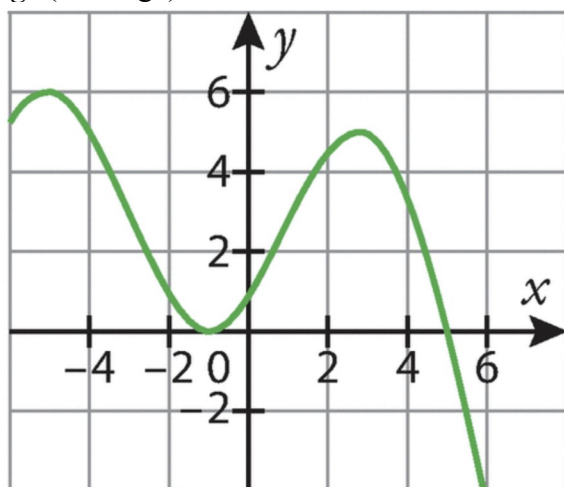
D'après le graphique ci-dessus, on obtient le tableau de signes suivant :

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $5$ | $+\infty$ |     |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |

Ainsi, on en déduit que la fonction  $f$  est croissante sur  $]-\infty; -1]$ , décroissante sur  $[-1; 5]$  puis croissante sur  $[5; +\infty[$ .

### Exercice 38

On donne ci-dessous les représentations graphiques d'une fonction  $f$  (en vert) et d'une fonction  $g$  (en rouge) définies sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $g$  est-elle la dérivée de la fonction  $f$ ? Justifier.



Une fonction  $f$  est croissante (respectivement décroissante) si sa dérivée  $f'$  est positive (respectivement négative). Or on remarque que la fonction  $g$  est positive sur  $[0; 4]$ . Si elle était la dérivée de la fonction  $f$ , cette dernière devrait alors être croissante sur cet intervalle. Comme ceci n'est pas le cas, la fonction  $g$  ne peut pas être la dérivée de la fonction  $f$ .

### Exercice 39

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ .

1. Calculer la dérivée de la fonction  $f$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que polynôme.

Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = -2x + 3$ .

2. Étudier le signe de  $f'$  puis dresser le tableau de variations de  $f$ .

On a  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$ .

On en déduit le tableau suivant :

| $x$           | $-\infty$                        | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|---------------|----------------------------------|---------------|-----------|
| signe de $f'$ | +                                | 0             | -         |
| $f(x)$        | $\nearrow \frac{13}{4} \searrow$ |               |           |

On a  $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{3}{2} + 1 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} + 1 = -\frac{9}{4} + \frac{18}{4} + \frac{4}{4} = \frac{13}{4}$ .

3. La fonction  $f$  atteint-elle une valeur maximale? Si oui, laquelle?

La fonction  $f$  admet  $\frac{13}{4}$  comme valeur maximale et elle est atteinte pour  $x = \frac{3}{2}$ .

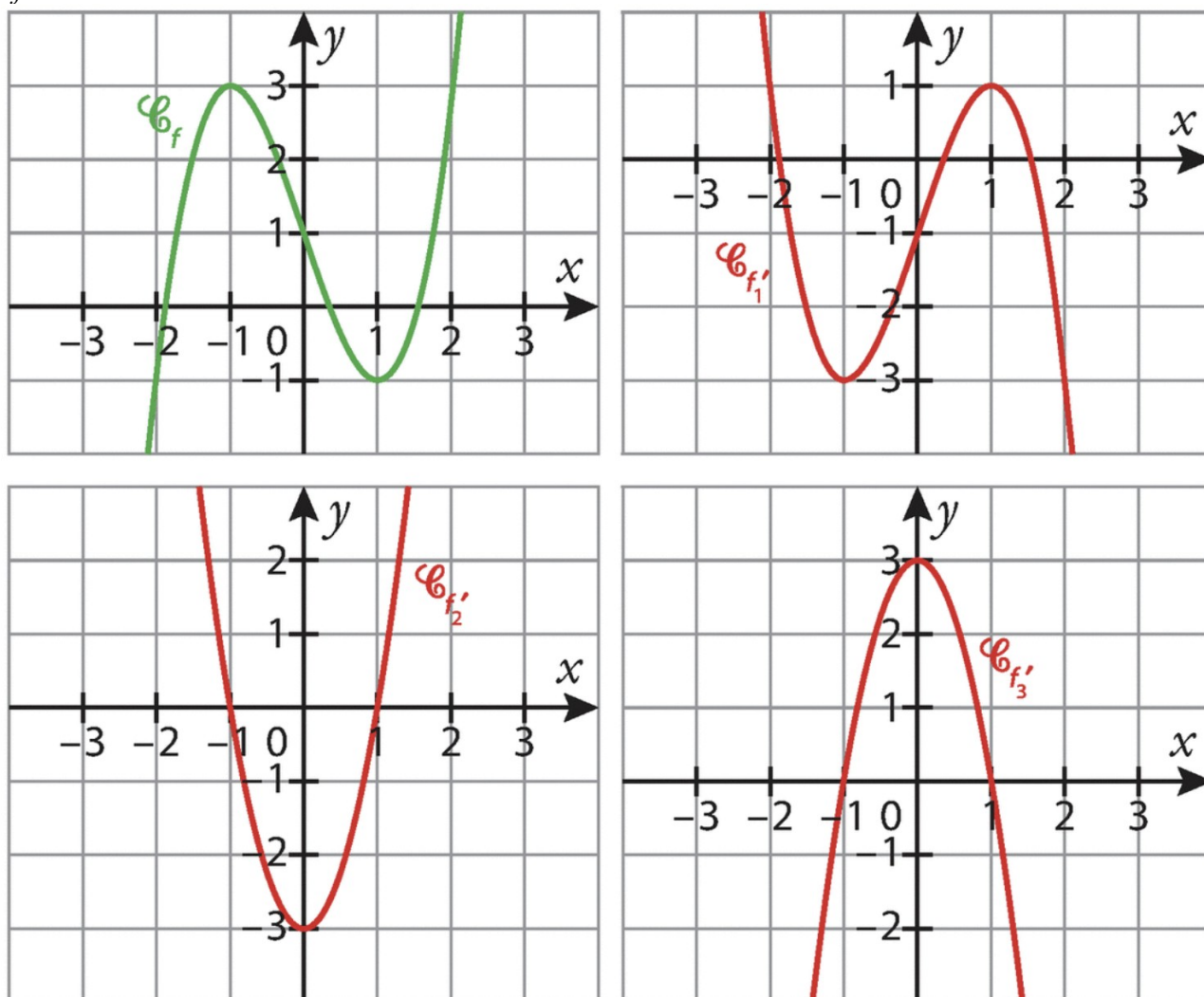
4. La fonction  $f$  atteint-elle une valeur minimale? Si oui, laquelle?

Non, la fonction  $f$  n'admet aucune valeur minimale.

**Exercice 40**

On donne ci-dessous, en vert, la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et, en rouge, trois représentations graphiques de fonctions  $f_1'$ ,  $f_2'$  et  $f_3'$  définies sur  $\mathbb{R}$ .

Parmi les trois fonctions  $f_1'$ ,  $f_2'$  et  $f_3'$ , laquelle pourrait être la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .



D'après le premier graphique, la fonction  $f$  est croissante sur  $]-\infty; -1]$ , décroissante sur  $[-1; 1]$  et croissante sur  $[1; +\infty[$ . Il est donc nécessaire que sa dérivée soit positive sur  $]-\infty; -1]$ , négative sur  $[-1; 1]$  et positive sur  $[1; +\infty[$ . La seule fonction qui correspond à cette description est  $f_2'$ .

**Exercice 41**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -2x^2 + px + 12$ .

1. Exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $p$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que polynôme. Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = -4x + p$ .

2. Sachant que la fonction  $f$  atteint son maximum en 1, déterminer le réel  $p$ .

Si la fonction  $f$  atteint son maximum en 1, cela signifie que son nombre dérivé  $f'(1)$  est nul.

Or  $f'(1) = -4 \times 1 + p = -4 + p$ . Ainsi  $f'(1) = 0 \Leftrightarrow -4 + p = 0 \Leftrightarrow p = 4$ .

**Exercice 42**

Une entreprise fabrique des masques chirurgicaux. Le coût moyen de production d'un masque dépend de la quantité produite. Ce coût moyen est donné, en euros, par la fonction  $f$  définie sur  $[0;5]$  par  $f(x)=0,5x^2-3x+4,52$ , où  $x$  est le nombre de masques fabriqués, en millions.

1. Si l'entreprise produit 500 000 masques, quel est le coût moyen de fabrication d'un masque ? 500 000 masques correspondent à un demi million. On cherche donc  $f(0,5)$ .

On a  $f(0,5)=0,5\times 0,5^2-3\times 0,5+4,52=3,145$ .

Ainsi le coût moyen de fabrication de 500 000 masques chirurgicaux sera de 3,145 euros.

2. Pour quelle quantité de masques produits le coût moyen est-il minimal ?

On cherche le coût minimal. Pour cela, on cherche les variations de la fonction  $f$  en étudiant sa fonction dérivée.

On a, pour tout réel  $x$  compris dans  $[0;5]$ ,  $f'(x)=0,5\times 2x-3=x-3$ .

Or  $f'(x)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ . On en déduit le tableau suivant :

| $x$           | 0    | 3    | 5    |
|---------------|------|------|------|
| signe de $f'$ | -    | 0    | +    |
| $f(x)$        | 4,52 | 0,02 | 2,02 |

On a  $f(0)=0,5\times 0^2-3\times 0+4,52=4,52$ ,  $f(3)=0,5\times 3^2-3\times 3+4,52=0,02$  et  $f(5)=0,5\times 5^2-3\times 5+4,52=2,02$ .

D'après le tableau précédent, le coût moyen sera minimal pour 3 millions de masques chirurgicaux produits.

3. Quel est alors le coût moyen minimal de fabrication d'un masque ?

Si 3 millions de masques chirurgicaux sont fabriqués, alors le coût moyen minimal associé sera de 0,02 euros, soit 2 centimes.

**Exercice 43**

Une entreprise fabrique des chaises en bois, au maximum 10 milliers par mois. Le coût de fabrication, en milliers d'euros, de  $x$  milliers de chaises est estimé par :  $C(x)=5x^2+10x+100$ . Chaque chaise est vendue 70€.

1. Vérifier que le « bénéfice algébrique », en milliers d'euros, réalisé par la fabrication et la vente de  $x$  milliers de chaises est donné par :  $B(x)=-5x^2+60x-100$ .

Le bénéfice résulte de la différence entre la recette et le coût de production.

Or la recette, que l'on notera  $R(x)$ , correspond au produit entre le nombre de chaises fabriquées et le prix d'une chaise. Donc pour tout  $x\in[0;10]$ ,  $R(x)=70x$ .

On a alors  $B(x)=R(x)-C(x)=70x-(5x^2+10x+100)=70x-5x^2-10-100=-5x^2+60x-100$ .

Ainsi, pour tout  $x\in[0;10]$ ,  $B(x)=-5x^2+60x-100$ .

2. Étudier les variations de la fonction  $B$  sur l'intervalle  $[0;10]$ .

La fonction  $B$  est dérivable sur  $[0;10]$  en tant que polynôme.

Pour tout  $x\in[0;10]$ ,  $B'(x)=-10x+60=-10(x-6)$ .

$B'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -10(x-6)\geq 0 \Leftrightarrow x-6\leq 0 \Leftrightarrow x\leq 6$ .

On en déduit le tableau suivant :

|               |     |    |    |
|---------------|-----|----|----|
| $x$           | 0   | 6  | 10 |
| signe de $B'$ | +   |    | -  |
| $B(x)$        | 100 | 80 | 0  |

On a  $B(0) = -5 \times 0^2 + 60 \times 0 - 100 = 100$ ,  $B(6) = -5 \times 6^2 + 60 \times 6 - 100 = 80$  et  $B(10) = -5 \times 10^2 + 60 \times 10 - 100 = 0$ .

3. En déduire la quantité de chaises à fabriquer et à vendre pour réaliser un bénéfice maximum. Préciser la valeur du bénéfice maximum.

Le bénéfice maximal est de 80 milliers d'euros et est réalisé pour la vente de 6 milliers de chaises.

### Exercice 44

Une coopérative produit et vend jusqu'à 2 000 litres de lait par jour. La fonction  $f$ , définie sur  $[0; 2]$ , par  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$ , modélise le bénéfice journalier réalisé, en centaines d'euros, en fonction de la quantité de lait  $x$  produite et vendue, en milliers de litres.

1. Vérifier que  $f'(x) = (x-2)(x-4)$ .

On a  $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 3 \times 2x + 8 = x^2 - 6x + 8$ .

Or  $(x-2)(x-4) = x \times x + x \times (-4) - 2 \times x - 2 \times (-4) = x^2 - 4x - 2x + 8 = x^2 - 6x + 8$ .

On trouve bien le même résultat en développant l'expression factorisée.

Ainsi  $f'(x) = (x-2)(x-4)$ .

2. En déduire que le bénéfice journalier est croissant.

On va chercher les variations de la fonction  $f$ . Pour cela, on étudie le signe de sa fonction dérivée.

On a  $f'(x) = (x-2)(x-4)$  où 2 et 4 sont les racines.

On obtient le tableau de signes de la fonction dérivée suivant :

|               |           |   |   |           |   |
|---------------|-----------|---|---|-----------|---|
| $x$           | $-\infty$ | 2 | 4 | $+\infty$ |   |
| Signe de $f'$ | +         | 0 | - | 0         | + |

Or la fonction  $f$  est définie sur  $[0; 2]$ . On obtient alors le tableau suivant :

|               |   |                |
|---------------|---|----------------|
| $x$           | 0 | 2              |
| signe de $f'$ | + |                |
| $f(x)$        | 0 | $\frac{20}{3}$ |

On a  $f(0) = \frac{1}{3} \times 0^3 - 3 \times 0^2 + 8 \times 0 = 0$ .

Et  $f(2) = \frac{1}{3} \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 8 \times 2 = \frac{8}{3} - 12 + 16 = \frac{8}{3} + 4 = \frac{8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{20}{3}$ .

3. La coopérative souhaite augmenter sa production de 1 000 litres. Elle suppose que son bénéfice va suivre le modèle donné par la fonction  $f$ . Son bénéfice va-t-il continuer à augmenter pour chaque litre supplémentaire produit et vendu entre 2 000 et 3 000 litres ?

D'après la question précédente, la dérivée  $f'$  est négative entre 2 et 4 (donc entre 2 et 3). Cela signifie que la fonction  $f$  sera décroissante sur l'intervalle  $[2; 4]$  (et donc sur  $[2; 3]$ ).

Ainsi, si la coopérative augmente sa production de 1 000 litres, son bénéfice ne va pas augmenter mais diminuer.

**Exercice 45**

On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[-2; 6]$ .

Sa courbe représentative, notée  $C$ , est donnée ci-contre.

- On sait que la courbe  $C$  passe par les points de coordonnées  $(0; 8)$ ,  $(2; 0)$  et  $(4; -8)$  ;
- On note  $T$  la tangente à la courbe  $C$  au point d'abscisse  $x=2$  ;
- On sait que la tangente  $T$  coupe l'axe des ordonnées en  $y=12$  .

On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  .

1. a. Déterminer les valeurs de  $f(2)$  et  $f'(2)$  .

On a  $f(2)=0$  .

On note les points  $A(2; 0)$  et  $B(0; 12)$  qui appartiennent à la tangente  $T$  d'après l'énoncé.

$$\text{D'où } f'(2) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{12 - 0}{0 - 2} = \frac{12}{-2} = -6 .$$

b. Donner une équation de la tangente  $T$  .

On sait que  $T: y = f'(a)(x - a) + f(a)$  avec  $a=2$  . Or  $f(2)=0$  et  $f'(2)=-6$  .

$$\text{D'où } T: y = f'(2)(x - 2) + f(2) = -6(x - 2) + 0 = -6x + 12 .$$

Ainsi  $T: y = -6x + 12$  .

c. Compléter le tableau de variation ci-dessous en utilisant le graphique.

| $x$               | -2 | 0 | 4  | 6 |
|-------------------|----|---|----|---|
| Variations de $f$ | -8 | 8 | -8 | 8 |

2. On admet que la fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[-2; 6]$  par  $f(x) = 0,5x^3 - 3x^2 + 8$  .

a. Montrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-2; 6]$ , on a  $f'(x) = 1,5x(x - 4)$  .

$$\text{On a } f'(x) = 0,5 \times 3x^2 - 3 \times 2x + 0 = 1,5x^2 - 6x = 1,5x \left( x - \frac{6}{1,5} \right) = 1,5x(x - 4) .$$

Ainsi, pour tout réel  $x \in [-2; 6]$ ,  $f'(x) = 1,5x(x - 4)$  .

**Remarque**

On peut aussi développer l'expression donnée par l'énoncé pour vérifier si l'expression de la dérivée obtenue est la même.

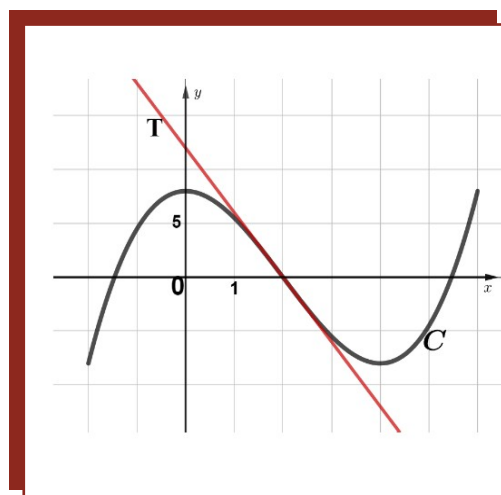
On a  $1,5x(x - 4) = 1,5x \times x - 1,5x \times 4 = 1,5x^2 - 6x$  . On retrouve bien l'expression de la dérivée calculée.

b. Étudier le signe de  $f'(x)$  et retrouver le tableau de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-2; 6]$  .

On reconnaît une fonction du second degré de la forme  $a(x - x_1)(x - x_2)$  où  $x_1=0$  et  $x_2=4$  sont les racines de la fonction dérivée  $f'$  .

On obtient alors le tableau de variation suivant :

|                   |    |   |    |   |   |
|-------------------|----|---|----|---|---|
| $x$               | -2 | 0 | 4  | 6 |   |
| signe de $f'$     | +  | 0 | -  | 0 | + |
| Variations de $f$ | -8 | 8 | -8 | 8 |   |



$$f(-2) = 0,5 \times (-2)^3 - 3 \times (-2)^2 + 8 = 0,5 \times (-8) - 3 \times 4 + 8 = -4 - 12 + 8 = -8$$

$$f(0) = 0,5 \times 0^3 - 3 \times 0^2 + 8 = 0 - 0 + 8 = 8$$

$$f(4) = 0,5 \times 4^3 - 3 \times 4^2 + 8 = 0,5 \times 64 - 3 \times 16 + 8 = 32 - 48 + 8 = -8$$

$$f(6) = 0,5 \times 6^3 - 3 \times 6^2 + 8 = 0,5 \times 216 - 3 \times 36 + 8 = 108 - 108 + 8 = 8$$

On retrouve le tableau donné à la question 1.c.

### Remarque

On peut aussi étudier le signe de la dérivée  $f'$  à l'aide d'une équation produit nul.

On a  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1,5x(x-4) = 0 \Leftrightarrow 1,5x = 0$  ou  $x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 4$ .

On obtient alors le tableau de variation suivant :

|                   |                                                                                    |   |   |   |   |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| $x$               | -2                                                                                 | 0 | 4 | 6 |   |
| $1,5x$            | -                                                                                  | 0 | + | + |   |
| $x-4$             | -                                                                                  | - | 0 | + |   |
| signe de $f'$     | +                                                                                  | 0 | - | 0 | + |
| Variations de $f$ |  |   |   |   |   |