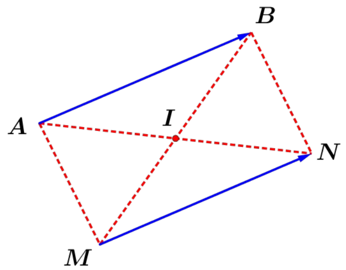
Vecteurs du plan

I. Notion de vecteur

I.1 Translation et vecteur associé

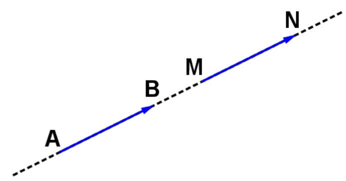
Soit A et B deux points distincts.
La **translation qui transforme A en B** associe à tout point M du plan l'unique point N tel que **$ABNM$ est un parallélogramme**.
On dit alors que **N est l'image de M par la translation qui transforme A en B**.
Cette translation est aussi appelée **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$**.

1^{er} cas : $M \notin (AB)$



$ABNM$ est un **parallélogramme**

2^{e} cas : $M \in (AB)$



$ABNM$ est un **parallélogramme aplati**

Remarques

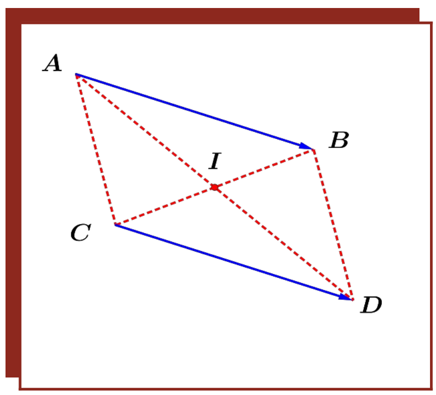
• Pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$: A s'appelle l'**origine** et B l'**arrivée**
• Un vecteur peut être défini par : - une **direction** (ici la droite (AB))
- un **sens** (ici de A vers B)
- une **norme** (aussi appelée longueur du vecteur, ici AB)

« Le point N est l'image de M par la **translation** qui transforme A en B » équivaut à « $[AN]$ et $[BM]$ se coupent en leur milieu ».

I.2 Égalité de deux vecteurs

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** si la translation qui transforme A en B transforme C en D. On note $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si et seulement si $[AD]$ et $[BC]$ **se coupent en leur milieu**.
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un **parallélogramme**.

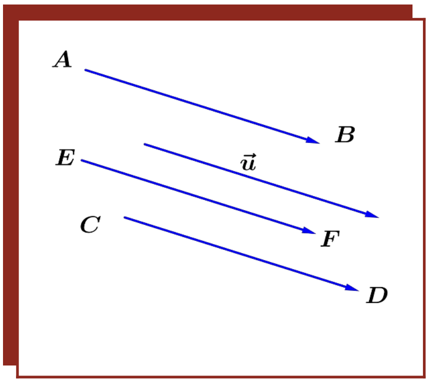


$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $M=B$.

Représentant d'un vecteur

Il y a une infinité de vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.

Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$, alors on dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des **représentants d'un même vecteur** que l'on peut noter avec une seule lettre ($\vec{u}$ par exemple), sans préciser l'origine et l'arrivée.



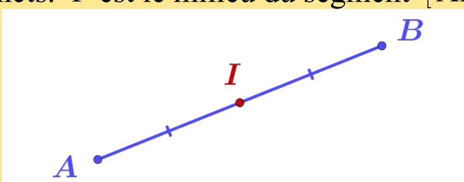
I.3 Vecteur nul et vecteur opposé

• On appelle **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, le vecteur associé à la translation qui transforme A en A, B en B, etc. On a $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$.
• $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ si et seulement si $A=B$.

On appelle **opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, noté $\overrightarrow{BA}$, le vecteur associé à la translation qui transforme B en A. On a $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

I.4 Caractérisation du milieu

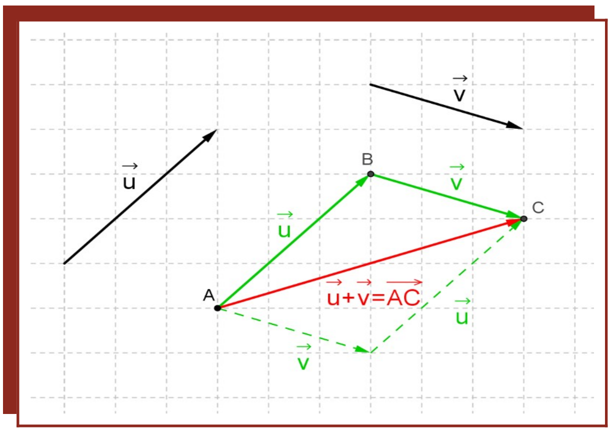
Soit A et B deux points distincts. I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$.



II. Somme de vecteurs

II.1 Vecteur somme

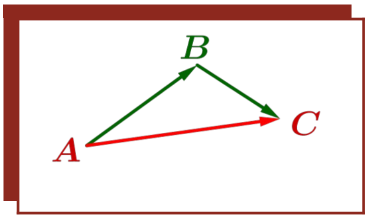
La **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$. On note ce vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.



Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :
• $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ • $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ • $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
Pour la somme, l'ordre n'a pas d'importance.

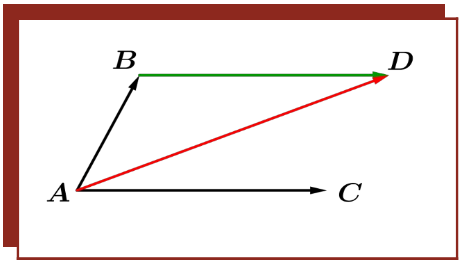
II.2 Relation de Chasles

Pour tous points A , B et C , on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.



III.3 Règle du parallélogramme

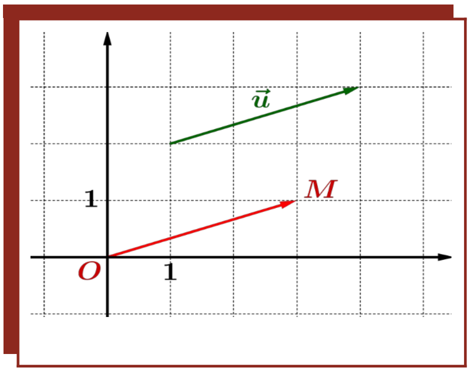
Soit A , B et C trois points distincts.
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ si et seulement si $ABDC$ est un **parallélogramme**.



III. Vecteurs et coordonnées

III.1 Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère $(O;I,J)$, les cordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$. Si $M(x;y)$, on note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x;y)$.



Deux vecteurs sont **égaux** si et seulement s'ils ont les **mêmes coordonnées** dans un repère.
Autrement dit, soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. $\vec{u}=\vec{v}$ si et seulement si $x=x'$ et $y=y'$.

III.2 Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Soit deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$. Alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

III.3 Coordonnées du vecteur somme

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

III.4 Coordonnées du vecteur opposé

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Alors $-\vec{u}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$.

III.5 Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et k un réel. Alors $k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

IV. Norme d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$. La norme du vecteur $\vec{u}$ est la longueur AB. On note $\|\vec{u}\|=\|\overrightarrow{AB}\|=AB$.
Si $\|\vec{u}\|=1$, le vecteur $\vec{u}$ est dit **unitaire**.

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Alors $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

- $\|\overrightarrow{AB}\|=0 \Leftrightarrow A=B$.
- Pour tout réel k et tout vecteur $\vec{u}$, $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$.