

## Fonction logarithme népérien

### I. Généralités sur la fonction logarithme népérien

La **fonction logarithme népérien** est la fonction **réciproque** de la fonction exponentielle. Elle est définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et est noté  $\ln$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $f(x) = \ln(x)$ .

#### Relation entre les fonctions $\exp$ et $\ln$

Pour tout  $y$  réel strictement positif et  $x$  réel, on a :

- $y = e^x \Leftrightarrow \ln(y) = x$
- $\ln(e^x) = x$  et  $e^{\ln(y)} = y$

### II. Propriétés algébriques

Pour tous réels strictement positifs  $x$  et  $y$  et tout entier relatif  $n$ , on a :

- $\ln(1) = 0$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

### III. Étude de la fonction exponentielle

#### III.1 Dérivée

La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et, pour tout réel  $x > 0$ ,  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .

#### III.2 Signe

- La fonction logarithme népérien est **négative** sur  $]0; 1]$ . Pour tout  $x \in ]0; 1]$ ,  $\ln(x) \leq 0$ .
- La fonction logarithme népérien est **positive** sur  $[1; +\infty[$ . Pour tout  $x \in [1; +\infty[$ ,  $\ln(x) \geq 0$ .

#### III.3 Variation

La fonction  $\ln$  est **strictement croissante** sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

#### III.4 Limites

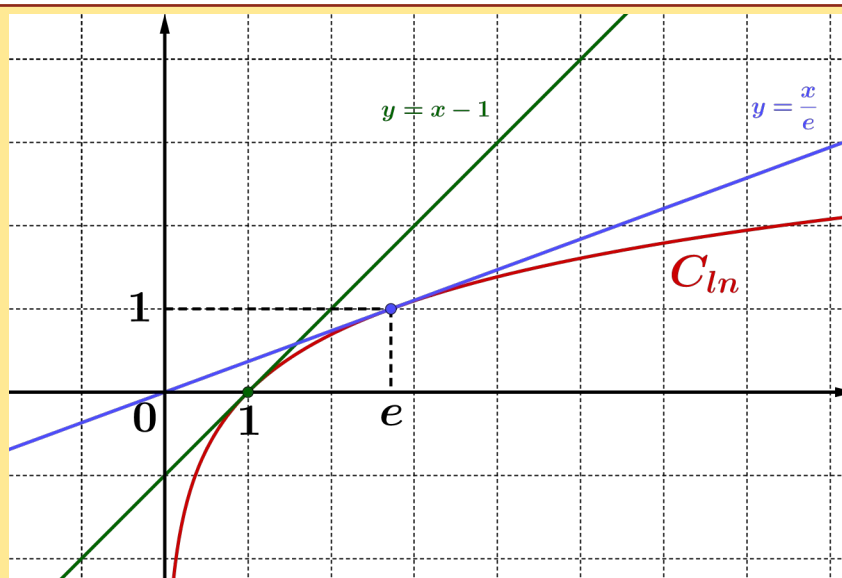
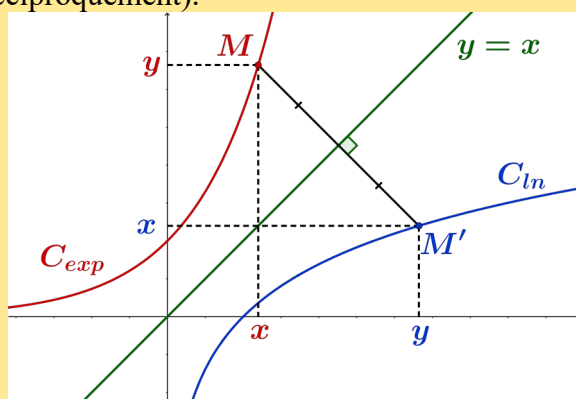
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

## III.5 Tableau

|         |           |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|-----------|
| $x$     | 0         | 1 | e | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $  $      |   | + |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |

## III.6 Représentation graphique

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction logarithme népérien peut être obtenue comme la courbe image de la représentation de la fonction exponentielle par la symétrie d'axe la droite  $y=x$  (et réciproquement).



Équations de tangente :

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est  $T_1: y = x - 1$ .
- L'équation de la tangente au point d'abscisse e est  $T_e: y = \frac{x}{e}$ .

## IV. Équations de inéquations

Pour tous réels strictement positifs  $x$  et  $y$ , on a :

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
- $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow 0 < x < y$
- $\ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y > 0$

Pour tout réel  $x$  strictement positif et tout réel  $y$ , on a :

- $\ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y$
- $\ln(x) < y \Leftrightarrow 0 < x < e^y$
- $\ln(x) > y \Leftrightarrow x > e^y$

### Attention !

Pour les équations et les inéquations avec les logarithmes, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être positives).

## V. Fonctions composées $x \rightarrow \ln(u(x))$

Soit  $u$  une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle  $I$ .

On considère la fonction composée  $f$  définie par  $f = \ln \circ u$ .

Pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) = \ln(u(x))$ . On la note aussi  $f = \ln(u)$ .

Soit  $f$  la fonction définie par  $f = \ln(u)$  où  $u$  est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle  $I$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $I$  et pour tout réel  $x \in I$ ,  $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ .

Soit  $f$  une fonction définie par  $f(x) = \ln(u(x))$  où  $u$  est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle  $I$ . Alors la fonction  $f$  a le même sens de variation que la fonction  $u$ .

## VI. Fonction logarithme décimal

La fonction **logarithme décimal** est la fonction, notée  $\log$ , définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par  $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ .

### Remarques

- $\ln(10) > 0$ , donc le nombre  $k = \frac{1}{\ln(10)}$  est strictement positif. Donc, de  $\log(x) = k \ln(x)$ , on en déduit que la fonction  $\log$  a le même sens de variation que la fonction  $\ln$ .
- Toutes les propriétés analytiques de la fonction  $\ln$  s'appliquent à la fonction  $\log$ .
- Les fonctions  $\ln$  et  $\log$  sont intégrées de manière distincte dans les calculatrices.

**Utilisations du logarithme décimal**

- En chimie, on exprime le caractère acido-basique d'une solution au moyen d'un indicateur noté  $pH$ . On a  $pH = -\log [H_3O^+]$  où  $[H_3O^+]$  est exprimée en  $mol.L^{-1}$ .
- Sur l'échelle de Richter, la magnitude d'un tremblement de terre est donnée par la formule  $R = \log \left( \frac{I}{I_0} \right)$ ,  $I$  étant l'intensité du tremblement de terre et  $I_0$  une intensité minimale.
- La puissance d'un son est donnée en décibels par  $10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right)$ ,  $I_0$  étant l'intensité la plus faible perceptible par l'oreille humaine.
- D'après la loi de Benford, lorsqu'on tire au hasard un nombre dans une série de nombres quelconques, la probabilité que le premier chiffre significatif soit le chiffre  $d$  est environ égale à  $\log \left( 1 + \frac{1}{d} \right)$ . Ainsi, la probabilité que le premier chiffre significatif soit 1 est environ égale à  $\log(2)$ . Cette loi est utilisée en France pour détecter les fraudes fiscales.