Chapitre 8

Vecteurs du plan

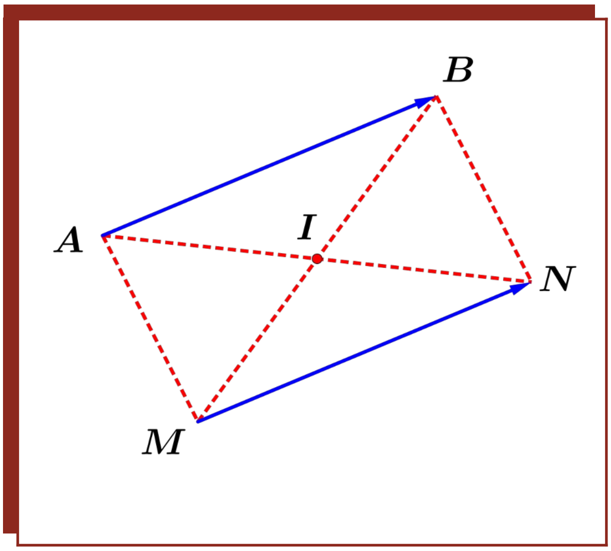
I. Notion de vecteur

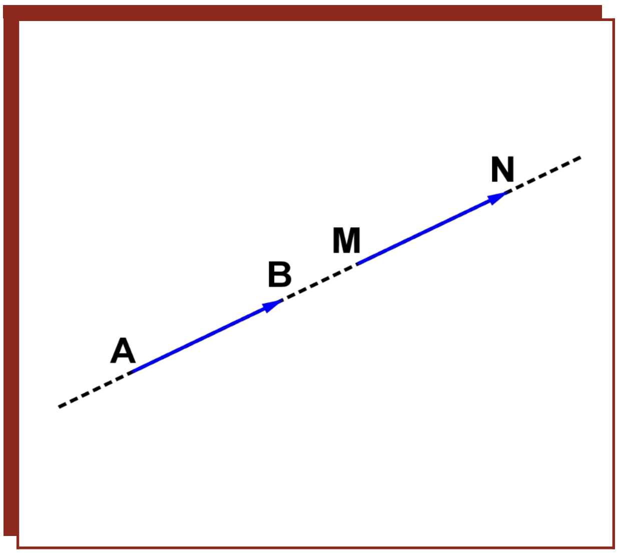
I.1 Translation et vecteur associé

Définition 1

Soit A et B deux points distincts.
La **translation qui transforme A en B** associe à tout point M du plan l'unique point N tel que **$ABNM$ est un parallélogramme**.
On dit alors que **N est l'image de M par la translation qui transforme A en B**.
Cette translation est aussi appelée **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$**.

1^er^ cas : $M \notin (AB)$ 2^e^ cas : $M \in (AB)$





$ABNM$ est un **parallélogramme** $ABNM$ est un **parallélogramme aplati**

Remarques

• Pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$: A s'appelle l'**origine** et B l'**arrivée**
• Un vecteur peut être défini par : - une **direction** (ici la droite (AB))
- un **sens** (ici de A vers B)
- une **norme** (aussi appelée longueur du vecteur, ici AB)

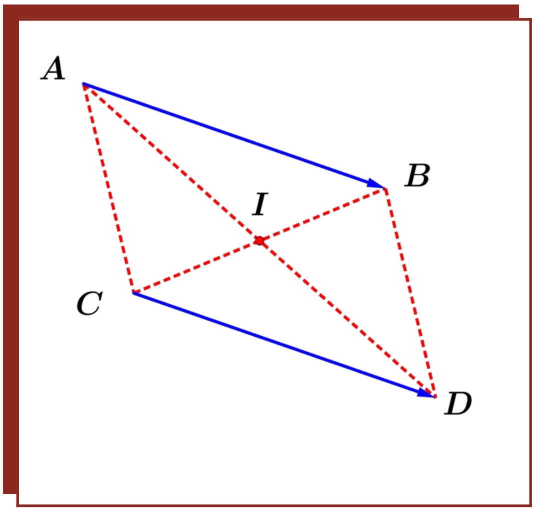
Propriété 2

« Le point N est l'image de M par la **translation** qui transforme A en B » équivaut à « $[AN]$ et $[BM]$ se coupent en leur milieu ».

I.2 Égalité de deux vecteurs

Définition 3

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** si la translation qui transforme A en B transforme C en D.
On note $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.



Propriété 4

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si et seulement si $[AD]$ et $[BC]$ **se coupent en leur milieu**.
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un **parallélogramme**.

Démonstration

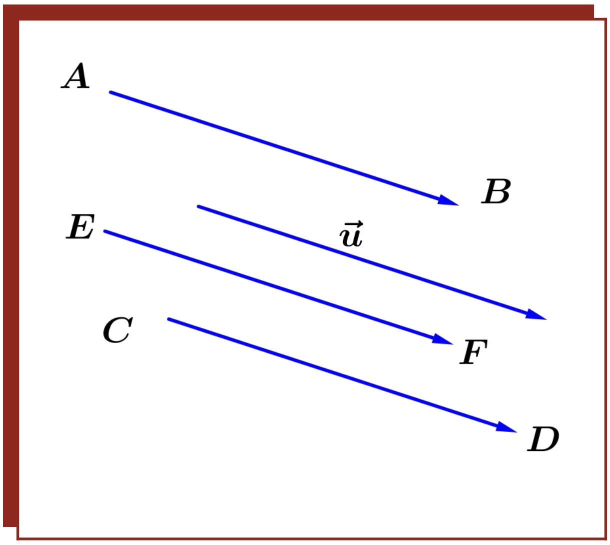
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme C en D
$\Leftrightarrow [AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu
$\Leftrightarrow$ ABDC est un parallélogramme

Propriété 5

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $M=B$.

Représentants d'un vecteur

Il y a une infinité de vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.
Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$, alors on dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des **représentants d'un même vecteur** que l'on peut noter avec une seule lettre ($\vec{u}$ par exemple), sans préciser l'origine et l'arrivée.



I.3 Vecteur nul et vecteur opposé

Définition 6

On appelle **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, le vecteur associé à la translation qui transforme A en A, B en B, etc. On a $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$.

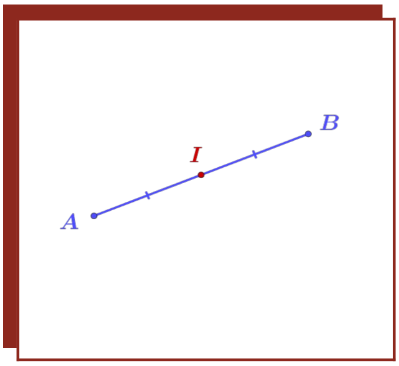
Propriété 7

$\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ si et seulement si $A=B$.

Définition 8

On appelle **opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, noté $\overrightarrow{BA}$, le vecteur associé à la translation qui transforme B en A. On a $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

I.4 Caractérisation du milieu



Propriété 9

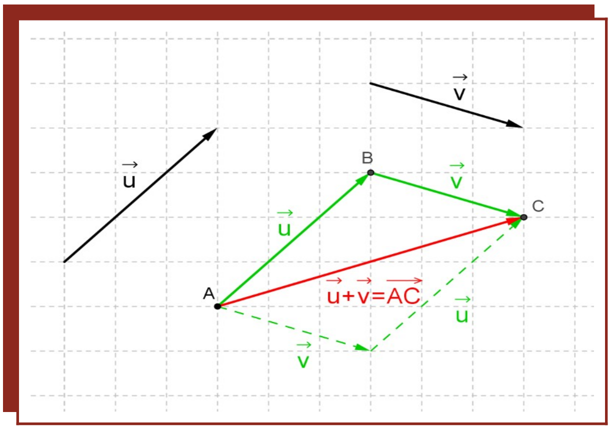
Soit A et B deux points distincts. Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$.

Démonstration

I milieu de $[AB] \Leftrightarrow M\in[AB]$ et $IA=IB$
$\Leftrightarrow$ les points A, I et B sont alignés dans cet ordre et $IA=IB$
$\Leftrightarrow (AM)\|(MB)$, le sens de A vers M est celui de M vers B et $IA=IB$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$

II. Somme de vecteurs

II.1 Vecteur somme



Définition 10

La **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$. On note ce vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

Remarque

On obtient un représentant de $\vec{u}+\vec{v}$ en mettant « bout à bout » un représentant de $\vec{u}$ et un représentant de $\vec{v}$.

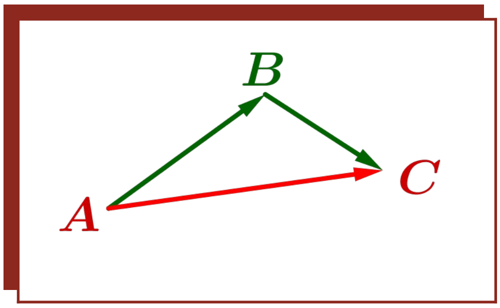
Propriété 11

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
- $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$

Pour la somme, l'ordre n'a pas d'importance.

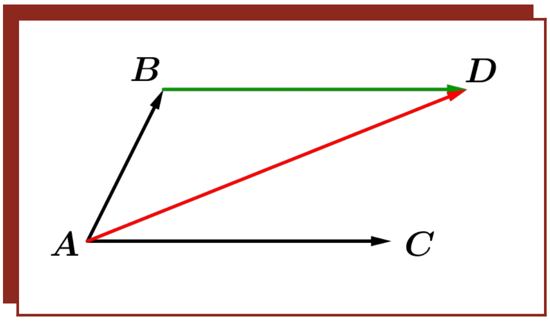
II.2 Relation de Chasles



Propriété 12

Pour tous points A , B et C , on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

III.3 Règle du parallélogramme



Propriété 13

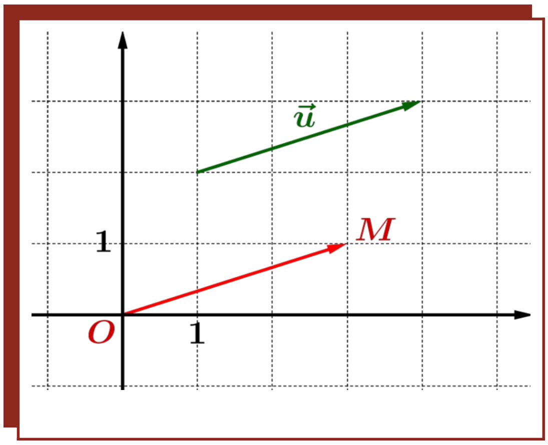
Soit A , B et C trois points distincts.
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ si et seulement si ABDC est un **parallélogramme**.

Démonstration

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$
$\Leftrightarrow$ ABDC est un parallélogramme

III. Vecteurs et coordonnées

III.1 Coordonnées d'un vecteur

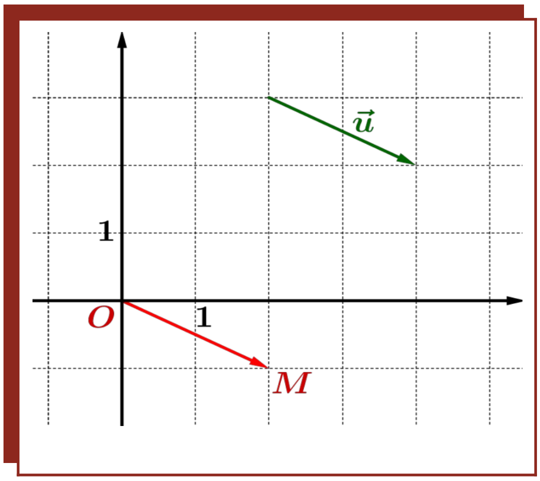


Définition 14

Dans un repère $(O;I,J)$, les cordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$. Si $M(x;y)$, on note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x;y)$.

Exemple

Dans le repère ci-contre, on a $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.



Remarque

Le repère $(O;I,J)$ se note aussi $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

Propriété 15

Deux vecteurs sont **égaux** si et seulement s'ils ont les **mêmes coordonnées** dans un repère.
Autrement dit, soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. $\vec{u}=\vec{v}$ si et seulement si $x=x'$ et $y=y'$.

III.2 Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Propriété 16

Soit deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$. Alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

Exemple

Soit $A(4;-1)$ et $B(-2;3)$. Alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-4\\3-(-1)\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$.

III.3 Coordonnées du vecteur somme

Propriété 17

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Exemple

Soit les vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$. Alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2-1\\5+3\end{pmatrix}=\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$.

III.4 Coordonnées du vecteur opposé

Propriété 18

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Alors $-\vec{u}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$.

Exemple

Soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$. Alors $-\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

III.5 Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Propriété 19

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et k un réel. Alors $k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

Exemple

Soit le réel $k=-3$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. Alors $-3\vec{u}\begin{pmatrix}-3\times 2\\-3\times(-1)\end{pmatrix}=-3\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$.

IV. Norme d'un vecteur

Définition 20

Soit un vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$. La norme du vecteur $\vec{u}$ est la longueur AB. On note $\|\vec{u}\|=\|\overrightarrow{AB}\|=AB$.
Si $\|\vec{u}\|=1$, le vecteur $\vec{u}$ est dit **unitaire**.

Propriété 21

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Alors $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Exemple

Soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$. Alors $\|\vec{u}\|=\sqrt{(-3)^2+7^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$.

Remarque

La norme de $\overrightarrow{AB}$ est $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Propriété 22

- $\|\overrightarrow{AB}\|=0 \Leftrightarrow A=B$.
- Pour tout réel k et tout vecteur $\vec{u}$, $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$.

Exemple

Soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$. Alors $\|3\vec{u}\|=|3|\times\|\vec{u}\|=3\sqrt{(-3)^2+7^2}=3\sqrt{58}$.