

Chapitre 8

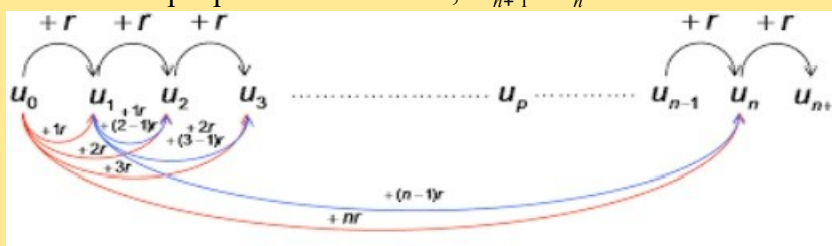
Suites arithmétiques et géométriques

I. Suites arithmétiques

Définition 1

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre**.

Ainsi, il existe un réel r tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n + r$.



Le nombre r est appelé **raison** de la suite arithmétique (u_n) . Il est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques : pour tout entier n , $r = u_{n+1} - u_n$.

Exemple

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 3$.

Alors on a $u_1 = u_0 + r = -5 + 3 = -2$, $u_2 = u_1 + r = -2 + 3 = 1$, $u_3 = u_2 + r = 1 + 3 = 4$, etc...

Remarques

- La formule précédente est la **formule de récurrence** d'une suite arithmétique.
- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante égale à u_0 .

Propriété 2 (hors programme)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p$, on a $u_n = u_p + (n - p)r$.

En particulier, pour tout entier n , $u_n = u_0 + nr$.

Exemples

• Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 3$.

Alors pour tout n , on a $u_n = u_0 + nr = -5 + 3n$.

• Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_4 = 3$ et de raison $r = -2$.

Alors pour tout $n \geq 4$, on a $u_n = u_4 + (n - 4)r = 3 - 2(n - 4) = 3 - 2n + 8 = 11 - 2n$.

Remarque

La formule précédente est la **formule explicite** d'une suite arithmétique qui est vue en classe de Terminale. Cette expression est bien plus pratique pour calculer des termes d'indice importants : en effet, on n'a pas besoin alors de calculer tous les termes précédents.

Propriété 3

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p .

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p .

Démonstration

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r > 0$. Pour tout n , $u_{n+1} = u_n + r$.

D'où $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r > 0$. Donc pour tout n , $u_{n+1} > u_n$.

Ainsi la suite (u_n) est (strictement) croissante.

La démonstration est analogue pour les deux autres cas.

Exemples

- La suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 3$ est croissante.
- La suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_7 = 10$ et de raison $r = -6$ est décroissante.

Propriété 4

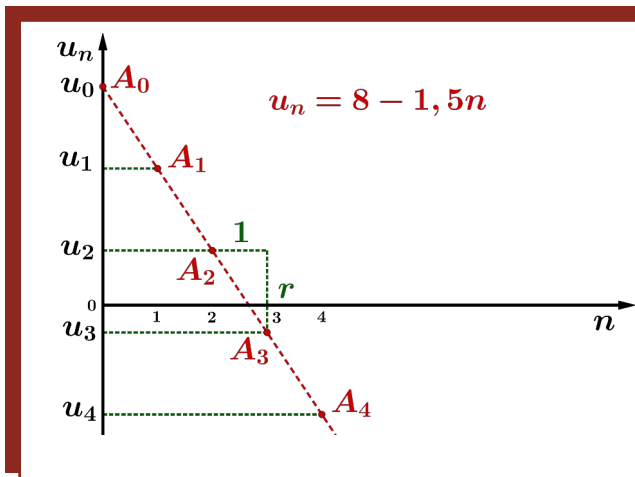
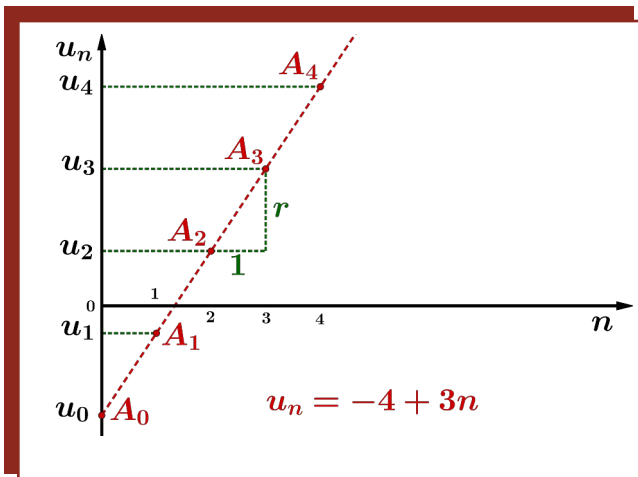
La représentation graphique d'une suite arithmétique (u_n) est un **ensemble de points isolés alignés de coordonnées $(n; u_n)$** .

Ces points sont situés sur une **droite** d'équation $y = rx + u_0$ (le coefficient directeur de la droite est la raison r).

Attention!

Les points de la suite arithmétique (u_n) sont situés sur une même droite mais ils représentent un nuage de points. La représentation graphique d'une suite arithmétique est donc un **ensemble de points isolés et non une droite**.

Exemples

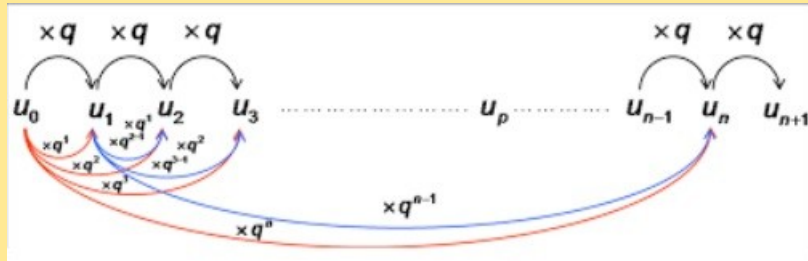


II. Suites géométriques

Définition 5

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre**.

Ainsi, il existe un réel q tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = q \times u_n$.



Le nombre q est appelé **raison** de la suite géométrique (u_n) .

Dans le cas où la suite (u_n) ne s'annule pas, q est égal au quotient de deux termes consécutifs

quelconques : pour tout entier n , $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exemple

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

Alors on a $u_1 = q \times u_0 = 2 \times 3 = 6$, $u_2 = q \times u_1 = 2 \times 6 = 12$, $u_3 = q \times u_2 = 2 \times 12 = 24$, etc...

Remarques

- La formule précédente est la **formule de récurrence** d'une suite géométrique.
- Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante égale à u_0 .

Propriété 6 (hors programme)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

En particulier, pour tout entier n , $u_n = u_0 \times q^n$.

Exemples

- Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $q = 4$.

Alors pour tout n , on a $u_n = u_0 \times q^n = -2 \times 4^n$.

- Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_5 = 7$ et de raison $q = -2$.

Alors pour tout $n \geq 5$, $u_n = u_5 \times q^{n-5} = 7 \times (-2)^{n-5}$.

Remarque

La formule précédente est la **formule explicite** d'une suite géométrique qui est vue en classe de Terminale. Cette expression est bien plus pratique pour calculer des termes d'indice important : en effet, on n'a pas besoin alors de calculer tous les termes précédents.

Propriété 7

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_p > 0$.

- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p .
- Si $q < 0$, alors la suite (u_n) **n'est pas monotone**.

Remarque

Si $u_p < 0$, ces sens de variations sont **inversés**.

Exemples

- La suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 2$ est croissante.
- La suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $q = 0,2$ est décroissante.
- La suite géométrique (w_n) de premier terme $w_4 = -7$ et de raison $q = 0,6$ est croissante.
- La suite géométrique (z_n) de premier terme $z_{12} = 9$ et de raison $q = -2$ n'est pas monotone.

Propriété 8

La représentation graphique d'une suite géométrique (u_n) est un **ensemble de points isolés** $(n; u_n)$, situés sur une courbe dite **exponentielle**.

Attention!

Les points de la suite géométrique (u_n) sont situés sur une courbe mais ils représentent un nuage de points. La représentation graphique d'une suite géométrique est donc un **ensemble de points isolés et non une courbe**.

Exemples

