

Chapitre 8

Fonction logarithme népérien

I. Définition et premières propriétés

La courbe de la fonction exponentielle ne coupe qu'une seule fois la droite d'équation $y=k$, où k est un réel strictement positif. En effet, la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x = k$ admet une unique solution.

Définition 1

L'unique solution de l'équation $e^x = k$ (k étant un réel strictement positif) s'appelle le logarithme népérien de k et se note $\ln(k)$.

Remarques

- $\ln(k)$ n'est défini que pour $k > 0$.
- $\ln(k)$ peut aussi s'écrire $\ln k$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple

L'équation $e^x = 3$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui est notée $\ln(3)$.

Pour avoir une valeur approchée de $\ln(3)$, on peut utiliser la calculatrice avec la touche « $\ln$ » (associée à la touche de la fonction exponentielle) et on obtient $\ln(3) \approx 1,0986$.

Propriété 2

- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$
- Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

Démonstration

- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$ par définition.
- Pour $k > 0$, $\ln(k)$ est l'unique solution de l'équation $e^x = k$. En posant $k = e^x$ où x est un réel, l'égalité précédente conduit à $e^{\ln(k)} = e^x$ et donc $e^{\ln(e^x)} = e^x$. Ainsi, pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.
- $\ln(1) = \ln(e^0) = 0$ et $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$.

Propriété 3

Pour tout réel x strictement positif et tout réel y , $y = \ln(x) \Leftrightarrow e^y = x$.

Démonstration

- Supposons que $y = \ln(x)$. Alors $e^y = e^{\ln(x)}$ et donc $e^y = x$.
- Supposons que $e^y = x$. Alors $\ln(e^y) = \ln(x)$ et donc $y = \ln(x)$.

II. Propriétés algébriques

Propriété 4

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Démonstration

Soit x et y des réels strictement positifs.

On a $e^{\ln(x) + \ln(y)} = e^{\ln(x)} \times e^{\ln(y)} = xy$. Or $e^{\ln(xy)} = xy$.

Ainsi, pour tous réels x et y strictement positifs, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Propriété 5

Pour tous réels x et y strictement positifs et tout entier relatif n , on a :

$$\bullet \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad \bullet \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad \bullet \ln(x^n) = n \ln(x) \quad \bullet \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$$

Démonstration

• On a $\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0$. Ainsi $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

• On a $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

• Démontrons par récurrence l'égalité dans le cas où n est un entier naturel.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : « $\ln(x^n) = n \ln(x)$ ».

• Initialisation : $n=0$

On a $\ln(x^0) = \ln(1) = 0$ et $0 \times \ln(x) = 0$. Donc P_0 est vérifiée.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie. Démontrons que P_{n+1} est vraie.

On a $\ln(x^{n+1}) = \ln(xx^n) = \ln(x) + \ln(x^n)$.

Or, par hypothèse de récurrence, $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

D'où $\ln(x^{n+1}) = \ln(x) + n \ln(x) = (n+1) \ln(x)$.

Donc la propriété P_{n+1} est vraie.

• Conclusion : La propriété est vraie au rang $n=0$ et elle est héréditaire. Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n .

On a montré que pour tout entier naturel n , $\exp(nx) = \exp(x)^n$.

Démontrons maintenant l'égalité dans le cas où n est un entier négatif.

Soit n un entier négatif. Posons $n = -m$ où m est un entier naturel.

Pour tout réel x , $\ln(x^n) = \ln(x^{-m}) = \ln\left(\frac{1}{x^m}\right) = -\ln(x^m) = -m \ln(x) = n \ln(x)$.

On a donc prouvé l'égalité pour tout entier relatif n .

• On a $\ln(x) = \ln((\sqrt{x})^2) = 2 \ln(\sqrt{x})$. Ainsi $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$.

Exemples

$$\bullet \ln\left(\frac{1}{8}\right) = -\ln(8) \quad \bullet \ln\left(\frac{16}{11}\right) = \ln(16) - \ln(11) \quad \bullet \ln(x^5) = 5 \ln(x)$$

Remarque

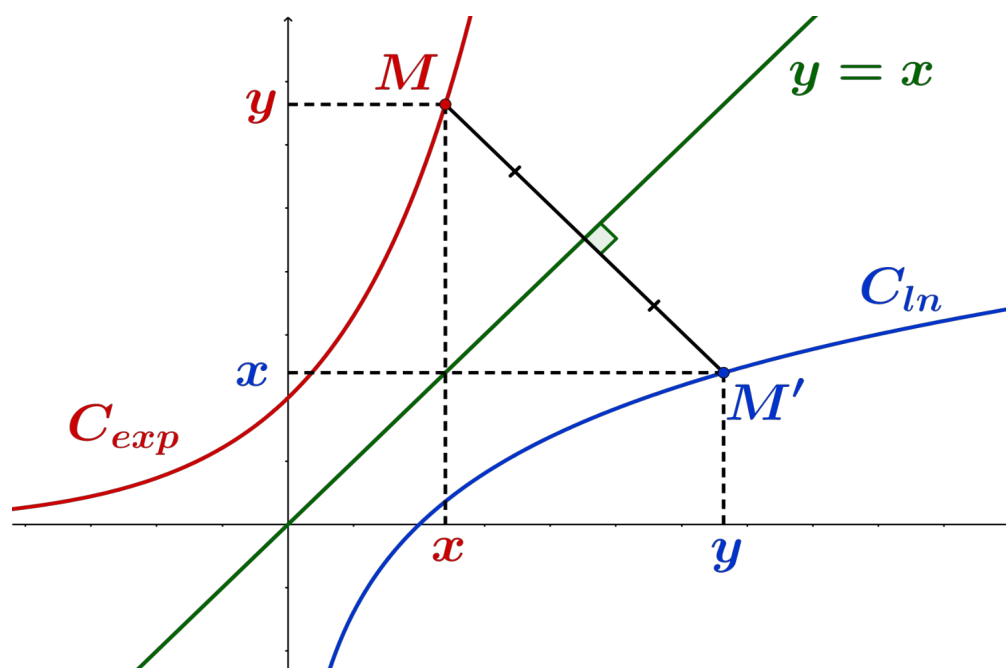
En résumé, le logarithme népérien a la particularité de transformer les produits en sommes, les quotients en différences et les puissances en multiplications.

III. Étude de la fonction logarithme népérien**III.1 Signe et variation****Définition 6**

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction, notée $\ln$, qui à tout réel x strictement positif associe le nombre $\ln(x)$. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \ln(x)$.

Propriété 7

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction logarithme népérien peut être obtenue comme la courbe image de la représentation de la fonction exponentielle par la symétrie d'axe la droite $y=x$ (et réciproquement).

**Remarques**

- Sur $\mathbb{R}$, la courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de la droite d'équation $y=x$.
- Sur $]0; +\infty[$, la droite d'équation $y=x$ est au-dessus de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

Propriété 8

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration

On admet que la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$.

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{\ln(x)} - x$.

Par définition du logarithme, $e^{\ln(x)} = x$. La fonction f est donc la fonction nulle. Donc sa dérivée est aussi la fonction nulle. On note u la fonction dérivée de la fonction $\ln$.

Alors pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = u(x)e^{\ln(x)} - 1$. D'où $f'(x) = 0 \Leftrightarrow u(x)e^{\ln(x)} - 1 = 0 \Leftrightarrow u(x)x = 1$.

Par conséquent, pour tout réel $x > 0$, $u(x) = \frac{1}{x}$.

Remarque

La démonstration de la dérivabilité de la fonction $\ln$ n'est pas évidente. La voici :

Soit a un réel strictement positif.

On a $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\ln(a+h) - \ln(a)}{h}$.

On pose $u = \ln(a+h)$ et $v = \ln(a)$. Alors $e^u = a+h$ et $e^v = a$. D'où $\tau(h) = \frac{u-v}{e^u - e^v}$.

Notons alors $k = u - v$. On a alors $u = v + k$. Donc $\tau(h) = \frac{k}{e^{v+k} - e^v}$.

La fonction $\ln$ est continue sur $]0; +\infty[$, alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} k = \lim_{h \rightarrow 0} (u - v) = \lim_{h \rightarrow 0} (\ln(a+h) - \ln(a)) = \ln(a) - \ln(a) = 0$$

De plus, la fonction exponentielle est dérivable en v avec pour nombre dérivé e^v , d'où :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^{v+k} - e^v}{k} = e^v = a$$

Il en résulte que $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{e^{v+k} - e^v} = \frac{1}{a}$.

On a $\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$ et $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{e^{v+k} - e^v} = \frac{1}{a}$. Par composition, $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \frac{1}{a}$.

Ceci est vrai pour tout réel a strictement positif. Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Propriété 9

La fonction $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.

Démonstration

Pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Or pour tout réel $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$.

Ainsi, la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

III.2 Limites

Théorème 10

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

Démonstration

• Soit A un réel. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

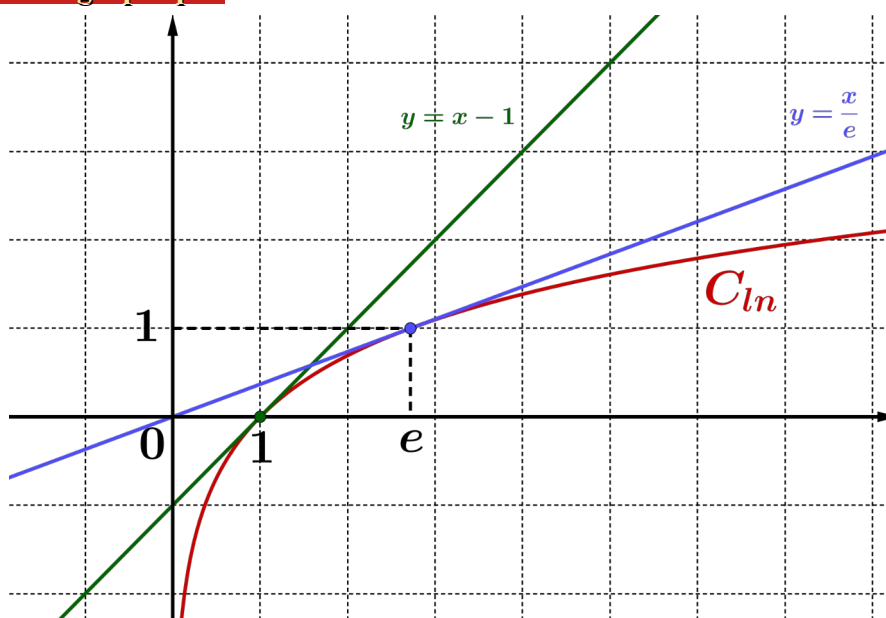
D'où $\ln(x) > A \Leftrightarrow x > e^A$. Donc tout intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $\ln(x)$ pour x assez grand. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

• Procédons par changement de variable. Posons $X = \frac{1}{x}$. On a alors $\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\ln(X)$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} X = +\infty$ et par produit, $\lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln(X) = -\infty$. Par composition, on a alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$.

III.3 Tableau de variations et courbe représentative**Tableau de variations**

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

Représentation graphique**Remarques**

• L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $T_1 : y = x - 1$.

• L'équation de la tangente au point d'abscisse e est $T_e : y = \frac{x}{e}$.

III.4 Propriétés analytiques

Propriété 11

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

$$\bullet \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y \quad \bullet \ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow 0 < x < y \quad \bullet \ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y > 0$$

Pour tout réel x strictement positif et tout réel y , on a :

$$\bullet \ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y \quad \bullet \ln(x) < y \Leftrightarrow 0 < x < e^y \quad \bullet \ln(x) > y \Leftrightarrow x > e^y$$

Démonstration

- Les trois premiers points sont vrais par stricte croissance de la fonction $\ln$.
- Le 4^e point a été démontré à la propriété 3.
- Les deux derniers points sont vrais par stricte croissance de la fonction exponentielle.

Exemples

$$\bullet \ln(5x) < \ln(3) \Leftrightarrow 0 < 5x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{3}{5} \quad \bullet \ln(x) = 8 \Leftrightarrow x = e^8 \quad \bullet \ln(x) > \sqrt{2} \Leftrightarrow x > e^{\sqrt{2}}$$

IV. Fonctions composées $x \rightarrow \ln(u(x))$

Définition 12

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

On considère la fonction composée f définie par $f = \ln \circ u$.

Pour tout $x \in I$, $f(x) = \ln(u(x))$. On la note aussi $f = \ln(u)$.

Exemple

Soit la fonction u définie par $u(x) = x - 1$. La fonction u est strictement positive sur $]1; +\infty[$.
la fonction $f = \ln(u)$ est définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x - 1)$.

Propriété 13

Soit f la fonction définie par $f = \ln(u)$ où u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

La fonction f est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Démonstration

On utilise ici la dérivée d'une fonction composée.

$$\text{Pour tout } x \in I, f'(x) = u'(x) \times \ln'(u(x)) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^4 + 1)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 1}$.

Propriété 14

Soit f une fonction définie par $f(x) = \ln(u(x))$ où u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I . Alors la fonction f a le même sens de variation que la fonction u .

Démonstration

Pour tout réel $x \in I$, on a $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Or pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$. Donc le signe de f' dépend de celui de u' , ce qui signifie que f' et u' ont le même signe. Par suite, cela implique que f et u ont les mêmes variations.

V. Fonction logarithme décimal**Propriété 15**

La fonction **logarithme décimal** est la fonction, notée **log**, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Remarques

- $\ln(10) > 0$, donc le nombre $k = \frac{1}{\ln(10)}$ est strictement positif. Donc, de $\log(x) = k \ln(x)$, on en déduit que la fonction $\log$ a le même sens de variation que la fonction $\ln$.
- Toutes les propriétés analytiques de la fonction $\ln$ s'appliquent à la fonction $\log$.
- Les fonctions $\ln$ et $\log$ sont intégrées de manière distincte dans les calculatrices.

Exemples

- $\log(1) = \frac{\ln(1)}{\ln(10)} = 0$
- $\log(e) = \frac{\ln(e)}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)}$
- $\log(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$

Utilisations du logarithme décimal

- En chimie, on exprime le caractère acido-basique d'une solution au moyen d'un indicateur noté pH . On a $pH = -\log [H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est exprimée en $mol.L^{-1}$.
- Sur l'échelle de Richter, la magnitude d'un tremblement de terre est donnée par la formule $R = \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$, I étant l'intensité du tremblement de terre et I_0 une intensité minimale.
- La puissance d'un son est donnée en décibels par $10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$, I_0 étant l'intensité la plus faible perceptible par l'oreille humaine.
- D'après la loi de Benford, lorsqu'on tire au hasard un nombre dans une série de nombres quelconques, la probabilité que le premier chiffre significatif soit le chiffre d est environ égale à $\log \left(1 + \frac{1}{d} \right)$. Ainsi, la probabilité que le premier chiffre significatif soit 1 est environ égale à $\log(2)$. Cette loi est utilisée en France pour détecter les fraudes fiscales.