

## Loïs discrètes

### I. Loi uniforme

Une variable aléatoire  $X$  suit la **loi uniforme sur**  $\{1; 2; \dots; n\}$  si elle prend pour valeurs les entiers 1 à  $n$  de manière équiprobable, c'est-à-dire si  $P(X=k) = \frac{1}{n}$  pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $\{1; 2; \dots; n\}$ . Alors on a :

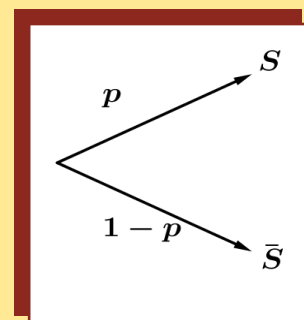
$$\bullet E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \bullet V(X) = \frac{n^2-1}{12} \qquad \bullet \sigma(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

### II. Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

#### II.1 Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre  $p$  (compris entre 0 et 1) est une expérience aléatoire comportant deux issues :

- l'une appelée succès, noté  $S$ , de probabilité  $p$ .
- l'autre appelée échec, noté  $\bar{S}$  ou  $E$ , de probabilité  $q = 1 - p$ .



#### II.2 Loi de Bernoulli

Notons  $X$  la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec. On dit que  $X$  suit la **loi de Bernoulli** de paramètre  $p$ .

Autrement dit, on a  $P(X=1) = p$  et  $P(X=0) = 1 - p$ .

On peut résumer la loi de Bernoulli par le tableau suivant :

| $x_i$      | 1   | 0     |
|------------|-----|-------|
| $P(X=x_i)$ | $p$ | $1-p$ |

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

- L'espérance de  $X$  est  $E(X) = p$ .
- La variance de  $X$  est  $V(X) = p(1-p)$ .
- L'écart-type de  $X$  est  $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$ .

### II.3 Schéma de Bernoulli

Soit  $n$  un entier naturel et  $p$  un réel compris entre 0 et 1.

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres  $n$  et  $p$  est une expérience aléatoire consistant à répéter  $n$  fois, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ .

### III. Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

On considère l'arbre associé à un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$ .

Le nombre de chemins dans l'arbre permettant de réaliser  $k$  succès est noté  $\binom{n}{k}$ .

Les nombres  $\binom{n}{k}$  sont appelés les **coefficients binomiaux**.

#### Méthode pour déterminer les coefficients binomiaux avec la calculatrice :

- Casio 35+ et supérieur : Pour calculer  $\binom{5}{2}$ , dans le menu RUN (calcul), appuyer sur la touche OPTN, puis choisir PROB. Tapez 5, puis choisir nCr, puis taper 2 et EXE.
- TI 82 et supérieur : Pour calculer  $\binom{5}{2}$ , taper 5, puis appuyer sur la touche MATH, choisir le menu PROB, puis choisir nCr ou Combinaison (version fr), puis taper 2 et ENTER.

Pour tous  $n$  et  $k$  entiers naturels tels que  $1 \leq k \leq n$ , on a :

$$\begin{aligned} \triangleright \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 & \qquad \triangleright \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \end{aligned}$$

#### Propriété de symétrie

Pour tous  $n$  et  $k$  entiers naturels tels que  $0 \leq k \leq n$ , on a  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .

#### Relation de Pascal

Pour tous entiers naturels  $n \geq 2$  et  $k$  vérifiant  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ .

**Remarque**

Ces propriétés permettent de tracer le triangle de Pascal.

- $\binom{n}{0} = 1$  assure que la première colonne ne contient que des 1 ;
- $\binom{n}{n} = 1$  assure que la diagonale ne contient que des 1 ;
- $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$  permet de déterminer n'importe quel coefficient binomial à partir de deux connus auparavant.

Par exemple, pour  $n=5$  et  $k=2$ , on a

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10.$$

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2  | 3  | 4 | 5 |
|------------------|---|---|----|----|---|---|
| 0                | 1 |   |    |    |   |   |
| 1                | 1 | 1 |    |    |   |   |
| 2                | 1 | 2 | 1  |    |   |   |
| 3                | 1 | 3 | 3  | 1  |   |   |
| 4                | 1 | 4 | 6  | 4  | 1 |   |
| 5                | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |

**IV. Loi binomiale**

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$ , correspondant à la répétition de  $n$  épreuves identiques et indépendantes et dont la probabilité du succès d'une épreuve est  $p$ .

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors de ces  $n$  épreuves.

On dit que  $X$  suit la **loi binomiale** de paramètres  $n$  et  $p$ . On note  $X \sim B(n; p)$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi binomiale  $B(n; p)$ .

Pour tout entier  $k \in [0; n]$ , on a  $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ .

**Méthode pour déterminer les probabilités d'une loi binomiale avec la calculatrice :**

• Casio 35+ et supérieur : Pour calculer  $P(X=20)$  avec  $X$  qui suit la loi  $B\left(100; \frac{1}{6}\right)$  : Choisir le menu STAT, puis DIST, puis BINM, puis Bpd. Rentrez les paramètres ("x" vaut ici 20, "NumTrial" vaut ici 100, et " $p$ " vaut  $\frac{1}{6}$ ). Enfin, sélectionner CALC.

• TI 82 et supérieur : Pour calculer  $P(X=20)$  avec  $X$  qui suit la loi  $B\left(100; \frac{1}{6}\right)$  : Appuyer sur 2nd+DISTR (au-dessus de la touche var), puis choisissez binompdf ou binomFdp (version Fr.). Complétez ensuite les paramètres (ici nombre d'essais, probabilité de succès et valeur de  $x$ ). L'ordre des paramètres est donc  $n$ , puis  $p$  et enfin  $k$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi binomiale  $B(n; p)$ .

- L'espérance de  $X$  est  $E(X) = np$ .
- La variance de  $X$  est  $V(X) = np(1-p)$ .
- L'écart-type de  $X$  est  $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$ .

### Représentation graphique

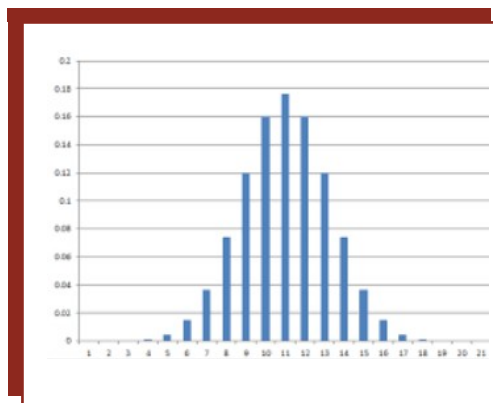
On peut représenter graphiquement une loi binomiale par un diagramme en bâtons en mettant en abscisse les valeurs prises par la variable aléatoire et en ordonnée les probabilités correspondantes. Le diagramme en bâtons est en forme de cloche et est approximativement centré sur son espérance.

### Exemple

Le diagramme en bâtons associé à la loi  $B(40; 0,5)$ , sur lequel  $k$  varie de 0 à 40 en abscisses, montre, pour chaque valeur de  $k$ , la hauteur de la barre correspondant à  $P(X=k)$ .

Par exemple, pour  $k=10$ , la hauteur de la barre est  $P(X=10)=0,16$ .

Le diagramme est en forme de cloche et est centré en 11. Or l'espérance vaut  $E(X)=40 \times 0,5 = 20$ , ce qui signifie que cette loi binomiale n'est pas centrée sur son espérance.



### Remarque

Pour des variables aléatoires suivant des lois binomiales de même paramètre  $n$ , plus  $p$  est éloigné de  $0,5$  et plus l'écart-type est petit. En conséquence, plus la cloche est « étroite » et « haute ».

## V. Échantillonnage

### V.1 Intervalle de fluctuation

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi binomiale  $B(n; p)$ .

Soit  $\alpha$  un réel tel que  $0 < \alpha < 1$  et  $a$  et  $b$  deux réels.

$[a; b]$  est un **intervalle de fluctuation au seuil de  $1-\alpha$**  si et seulement si  $P(a \leq X \leq b) \geq 1-\alpha$ .

### Remarques

- On parle aussi de seuil de confiance, de niveau de confiance ou encore de coefficient de confiance.
- Dans la pratique, on cherchera souvent un intervalle dont l'amplitude est la plus petite possible.
- Selon le contexte, l'intervalle est généralement de la forme  $[0; k]$ ,  $[k; n]$  ou  $[k; k']$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi binomiale  $B(n; p)$ .

Soit  $\alpha$  un réel tel que  $0 < \alpha < 1$  et  $a$  et  $b$  deux réels.

L'intervalle  $[a; b]$  tel que  $a$  et  $b$  soient les plus petits entiers vérifiant  $P(X \leq a) > \frac{\alpha}{2}$  et

$P(X \leq b) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$  est un **intervalle de fluctuation centré au seuil de  $1-\alpha$**  associé à  $X$ .

### V.2 Intervalle de fluctuation au seuil de 95%

Au sein d'une population, on suppose que la proportion d'un certain caractère est  $p$ .

On souhaite juger cette hypothèse. Pour cela, on prélève dans la population au hasard et avec remise (ou sans remise si la population étudiée est très grande), un échantillon de taille  $n$  sur lequel on observe une fréquence  $f$  de ce caractère.

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .  
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'une fréquence, sur un échantillon de taille  $n$  est :

$$I = \left[ \frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right] \text{ avec } a : \text{le plus petit entier tel que } P(X \leq a) > 0,025 .$$

$$b : \text{le plus petit entier tel que } P(X \leq b) \geq 0,975 .$$

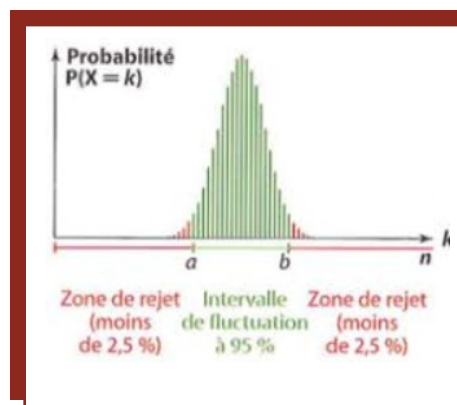
### Exemple

Dans le graphique ci-contre, 95% des valeurs se situent entre les réels  $a$  et  $b$ .

Nécessairement, 5% des valeurs sont

« à l'extérieur ».

Par symétrie, 2,5 % de ces valeurs se situent à gauche de  $a$  et 2,5 % à droite de  $b$ .



### V.3 Prise de décision

On fait l'hypothèse que la proportion d'un caractère dans une population est  $p$ .

On veut savoir si l'hypothèse est compatible avec l'échantillon étudié.

#### Prise de décision

Soit  $I$  l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% selon la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  et  $f$  la fréquence observée du caractère étudié.

- Si  $f \notin I$  alors on rejette l'échantillon avec une erreur au seuil de 5%. L'échantillon n'est pas représentatif.
- Si  $f \in I$  alors on accepte l'hypothèse au seuil de 95%.

## VI. Loi géométrique

### VI.1 Définition, probabilité et espérance

On considère une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité d'un succès est  $p$  et on répète cette épreuve de Bernoulli de manière indépendante jusqu'à l'obtention d'un succès.

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès.

On dit que  $X$  suit la **loi géométrique** de paramètre  $p$ . On note  $X \sim G(p)$ .

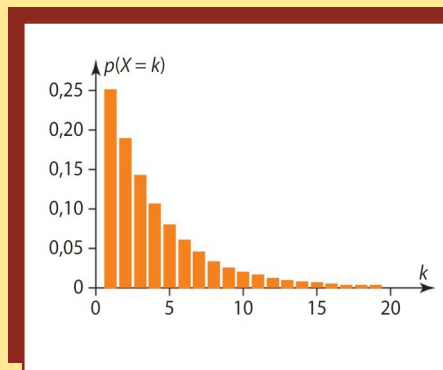
Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre  $p$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Alors :

- $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$
- $P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k$
- $P(X > k) = (1-p)^k$

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre  $p$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Alors l'espérance de  $X$  est  $E(X) = \frac{1}{p}$ .

Pour une variable aléatoire  $X$  suivant la loi géométrique  $G(p)$ , son diagramme en barres associés correspond à une décroissance exponentielle et  $P(X=1)$  est la hauteur de la première barre.



## VI.2 Loi sans vieillissement

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi **sans vieillissement** si pour tous entiers naturels non nuls  $s$  et  $t$ , on a  $P_{X>s}(X>s+t)=P(X>t)$ .

La loi géométrique est une loi sans vieillissement.