

Suites arithmétiques

Exercice 1

Déterminer si les suites (u_n) et (v_n) suivantes sont arithmétiques. Si oui, préciser leur raison.

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_n = 7 - 6n$.
2. La suite (v_n) est définie pour tout entier $n \geq 0$ par $v_n = n^2 - n$.

Exercice 2

Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques. Si oui, préciser leur raison.

1. Pour tout entier n , $u_n = 7 - 4n$.
2. Pour tout entier n , $v_n = n^2 - 1$.
3. Pour tout entier n , $w_n = (n+1)^2 - n^2$.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, dire si la suite (u_n) , définie sur $\mathbb{N}$, est arithmétique. Si oui, préciser le premier terme et la raison.

1. $u_n = 5n + 1$;
2. $u_n = \frac{4n^2 - 1}{2n + 1}$;
3. $u_n = \frac{n}{n+1}$;
4. $u_n = -n^3 + 3n^2$.

Exercice 4

Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial u_p et de raison r . Écrire l'expression du terme général de cette suite dans les cas suivants.

1. $u_0 = -2$ et $r = 3$;
2. $u_2 = 5$ et $r = 0,5$;
3. $u_0 = 0$ et $r = -0,8$;
4. $u_3 = -4$ et $r = 0,9$.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite arithmétique de terme initial $u_0 = 80$ et de raison -6 .

1. Écrire l'expression du terme général de cette suite.
2. Calculer u_{10} ainsi que le 10^e terme de cette suite.

Exercice 6

1. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_7 = 11$ et $u_{15} = 23$.

Déterminer la raison r et le premier terme u_0 de la suite (u_n) .

2. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_6 = 4$ et $u_{20} = 11$.

Déterminer la raison r et le premier terme u_0 de la suite (u_n) .

Exercice 7

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = -3$.

1. Exprimer u_n en fonction de n , puis calculer le centième terme de cette suite.
2. Déterminer le seuil n_0 à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs ou égaux à 10000.

Exercice 8

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 0,4 et telle que $u_7=12$. Calculer le terme initial u_0 , puis le terme u_{48} .
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 60 et telle que $u_{60}=5$. Calculer le terme initial u_1 , puis le terme u_{154} .

Exercice 9

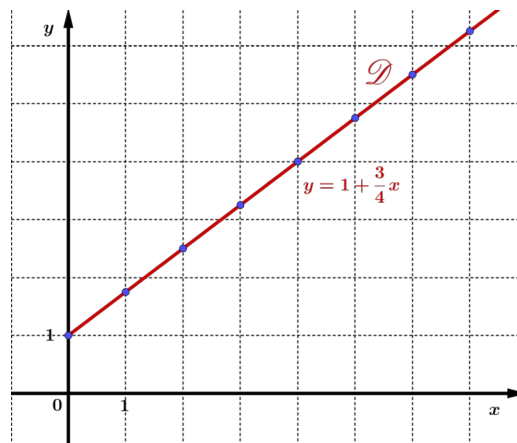
Donner le sens de variations de chacune des suites arithmétiques (u_n) suivantes.

1. $u_n=7+4n$;
2. $u_n=6-5n$;
3. $u_n=5n-3$;
4. $u_n=-2-\frac{1}{2}n$;
5. $u_n=-9n+1$;
6. $u_n=-\frac{7}{3}n+6$;
7. $u_n=(n+1)^2-n^2$;
8. $u_n=1+\sqrt{3}n$.

Exercice 10

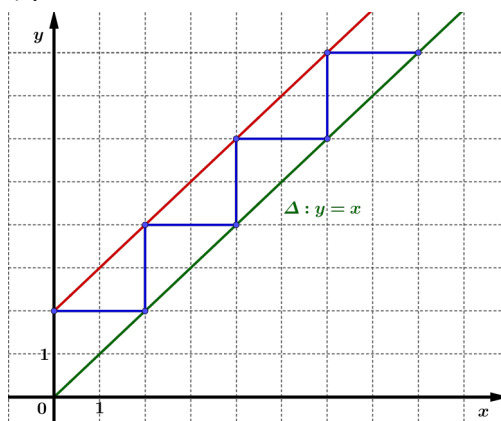
Soit la suite (u_n) telle que pour tout entier n , les points de coordonnées $(n; u_n)$ sont alignés sur la droite D tracée ci-contre.

1. Déterminer u_0 , u_1 , u_2 .
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Démontrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.



Exercice 11

On a représenté ci-dessous la suite (u_n) de premier terme $u_0=0$, définie par récurrence par $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier n .



1. Lire les valeurs u_1 , u_2 et u_3 .
2. Quelle est la fonction f ?
3. En déduire que la suite (u_n) est arithmétique et en donner la raison.

Exercice 12

Un téléphérique progresse à vitesse constante : À chaque seconde, son altitude augmente de $0,75\text{ m}$. La gare de départ est à une altitude de 1450 m .

On appelle a_n l'altitude de la cabine après n secondes de trajet, en mètres.

1. Déterminer les valeurs a_0 , a_1 et a_2 .
2. Montrer que la suite (a_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
3. La durée du trajet est précisément de 15 minutes. Quelle est l'altitude de la gare d'arrivée ?

Exercice 13

Monsieur Dupont désire creuser un puits, au fond de son jardin. Une réserve naturelle d'eau souterraine se situe à 12 mètres de profondeur. Il choisit le devis suivant pour le forage : Forfait de prise en charge, visite sur le terrain : 40€ TTC/Prix forfaitaire du mètre foré : 150€ TTC. On note p_n le prix, en euros, pour un forage de n mètres ($n > 0$).

1. Calculer p_1 .
2. Déterminer la nature de la suite (p_n) et en déduire l'expression de p_n en fonction de n .
3. Déterminer le prix à payer pour faire creuser ce puits.

Exercice 14

Une machine industrielle est achetée 5000€. Sa valeur de revente diminue chaque année de 500€.

1. Calculer sa valeur de revente au bout d'une année.
2. On note r_0 sa valeur d'achat et r_n sa valeur de revente au bout de n années.
 - a. Montrer que (r_n) est une suite arithmétique. Préciser son terme initial et sa raison.
 - b. Exprimer r_n en fonction de n . Quel est son sens de variations ?
3. Déterminer au bout de combien d'années la valeur de revente sera nulle.

Exercice 15

La 1^{ère} année d'exploitation, le bénéfice d'une entreprise est de 3000€. Ses bénéfices augmentent chaque année de 15000€. On suppose que cette évolution va se poursuivre les années suivantes.

1. Calculer le bénéfice de l'entreprise la 2^e année.
2. On note b_1 le bénéfice de la 1^{ère} année et b_n le bénéfice de la n -ième année.
 - a. Montrer que (b_n) est une suite arithmétique ; préciser son terme initial et sa raison.
 - b. Exprimer b_n en fonction de n . Quel est son sens de variations ?
3. Déterminer l'année à partir de laquelle le bénéfice sera pour la première fois supérieur à 200000€.

Exercice 16

Soit une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 .

Rappeler l'expression du terme général u_n et démontrer ce résultat.

Exercice 17

Soit une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 .

1. Rappeler l'expression du terme général u_n .
2. Calculer, pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n$.
3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) selon la valeur r .

Exercice 18

L'escalier de secours d'un gratte-ciel de 110 étages comporte 18 marches par étage. Jacques est au sommet du gratte-ciel et William au rez-de-chaussée, au bas de l'escalier. Ils décident par téléphone de se rejoindre en partant au même instant. William monte deux marches par seconde (sans s'essouffler !) et Jacques en descend quatre dans le même temps.

On note $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ le nombre de marches qui séparent Jacques du bas de l'escalier, respectivement au départ, au bout d'une seconde, de 2 secondes..., de n secondes.

On note $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ le nombre de marches qui séparent William du bas de l'escalier, respectivement au départ, au bout d'une seconde, de 2 secondes..., de n secondes.

Ainsi, $u_0=1980$ et $v_0=0$.

1. Calculer u_1, u_2, v_1 et v_2 .
2. Exprimer u_n et v_n en fonction de n .
3. Étudier les variations des suites (u_n) et (v_n) . Interpréter les résultats.
4. À quel instant (en minutes) et à quel étage Jacques et William vont-ils se rencontrer ?

Exercice 19

Déterminer si les suites (u_n) et (v_n) suivantes sont géométriques. Si oui, préciser leur raison.

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier n par $u_n=3^{2n+1}$.

2. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par $v_n=\frac{2^n}{n+1}$.

Exercice 20

Les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) sont-elles géométriques ? Si oui, en donner le premier terme et la raison. Pour tout entier n :

1. $u_n=-\frac{2}{5^n}$;

2. $v_n=\frac{2^{2n}}{3^{2n}}$;

3. $w_{n+1}=-w_n+3$ et $w_0=-4$.

Exercice 21

Les suites (u_n) et (v_n) , définies sur $\mathbb{N}$, sont-elles géométriques ? Si oui, préciser le premier terme et la raison.

1. $u_n=5^{2n+3}$;

2. $v_n=\frac{3n+2}{n+1}$.

Exercice 22

Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial u_p et de raison q . Écrire l'expression du terme général de cette suite dans les cas suivants.

1. $u_0=2$ et $q=5$;

2. $u_2=7$ et $q=0,1$;

3. $u_0=-9$ et $q=\frac{1}{2}$;

4. $u_5=\frac{1}{3}$ et $q=\frac{7}{2}$.

Exercice 23

1. Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial $u_0=40$ et telle que $u_3=5$. Calculer sa raison.

2. Soit (v_n) une suite géométrique de terme initial $v_1=0,1$ et telle que $v_4=21,6$. Calculer sa raison.

Exercice 24

1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $u_0=5$.
 - a. Pour tout entier n , exprimer u_n en fonction de n .
 - b. Calculer u_{10} .
2. Soit (v_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_3=16$.
 - a. Pour tout entier $n \geq 3$, exprimer v_n en fonction de n .
 - b. Calculer v_8 .

Exercice 25

1. Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_2=2$ et $u_7=486$. Déterminer la raison q et le premier terme u_0 de la suite (u_n) .
2. Soit (v_n) une suite géométrique de terme initial $v_1=0,2$ et telle que $v_4=3,125$. Déterminer sa raison q .

Exercice 26

1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et telle que $u_2=99$. Calculer le terme initial u_0 , puis u_{14} .
2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison 0,1 et telle que $u_3=8$. Calculer le terme initial u_1 , puis le terme u_5 .

Exercice 27

1. On donne $u_0=6$ et $q=\frac{1}{3}$. Calculer u_6 .
2. On donne $u_1=1024$ et $q=\frac{1}{2}$. Calculer u_8 .
3. On donne $u_3=2$ et $u_4=18$. Calculer q , u_0 et u_6 .

Exercice 28

Donner le sens de variations de chacune des suites géométriques (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ suivantes.

- | | |
|--|--|
| 1. $u_n=2 \times 3^n$; | 2. $u_n=2 \times 0,5^n$; |
| 3. $u_n=-4 \times 5^{n+1}$; | 4. $u_n=\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$; |
| 5. $u_n=-7 \times (\sqrt{2})^n$; | 6. $u_n=8\sqrt{3} \times 10^{n-1}$; |
| 7. $u_n=0,64 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$; | 8. $u_n=\left(\frac{5}{4}\right)^n$. |

Exercice 29

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0=4$. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n par $v_n=2^{u_n}$. Calculer v_0 , v_1 et v_2 puis démontrer que la suite (v_n) est géométrique et donner sa raison.

Exercice 30

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_n = 4 \times 2^n$.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison.
 - b. Quelles sont les variations de (u_n) ?
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n par $v_n = \frac{3^{n-1}}{5^{n+2}}$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison.
 - b. Quelles sont les variations de (v_n) ?
3. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier n par $w_n = 3^n \times 4^{2n-1}$.
 - a. Montrer que la suite (w_n) est géométrique. Préciser sa raison.
 - b. Quelles sont les variations de (w_n) ?

Exercice 31

Une population d'oiseaux d'une réserve était de 9000 le 1^{er} janvier dernier. Depuis cette date, elle diminue chaque jour de 2%.

1. Calculer la population d'oiseaux le 2^e jour, puis le 3^e jour.
2. On note p_0 la population le 1^{er} janvier et p_n la population n jours après.
 - a. Montrer que (p_n) est une suite géométrique ; préciser son terme initial et sa raison.
 - b. Écrire le terme de rang n de la suite (p_n) .

Exercice 32

Une machine-outil est achetée 9000€. Elle perd chaque année 20% de sa valeur.

1. Calculer sa valeur au bout d'une année.
2. On note r_0 sa valeur d'achat et r_n sa valeur de revente au bout de n années.
 - a. Montrer que (r_n) est une suite géométrique. Préciser son terme initial et sa raison.
 - b. Écrire l'expression de r_n en fonction de n .
3. Déterminer sa valeur au bout de quinze ans.

Exercice 33

La valeur acquise c_n par un capital c_0 placé n années à intérêts composés au taux annuel t est :

$$c_n = c_0 \left(1 + \frac{t}{100} \right)^n . \text{ Un capital de 600€ est placé à intérêts composés au taux annuel de } 4,25 \% .$$

1. Calculer la valeur acquise par le capital au bout d'un an puis au bout de deux ans de placement.
2. On note c_0 le montant du capital placé et c_n la valeur acquise par le capital après n années de placement. Montrer que (c_n) est une suite géométrique. Préciser son terme initial et sa raison.
3. Écrire l'expression de c_n en fonction de n , puis calculer c_9 .

Exercice 34

La plus grande des poupées russes mesure 10 cm . La taille d'une poupée est les deux tiers de celle qui la précède. Quelle sera la taille de la cinquième poupée ?

QCM

Pour chaque question, indiquer la ou les bonne(s) réponse(s).

1. Les suites ci-dessous sont arithmétiques :

a. $u_n = 3n - \frac{5}{4}$ b. $v_n = \frac{3}{4^{n+1}}$ c. $w_n = 2 - \frac{2}{7}n$ d. $z_n = 3 \times 2^n - 1$

2. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = -5$. L'expression du terme général est :

a. $u_n = 2 + 5n$ b. $u_n = 2 - 5n$ c. $u_n = 5 - 2n$ d. $u_n = 5 + 2n$

3. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $r = -5$. L'expression du terme général est :

a. $u_n = 2 - 5n$ b. $u_n = -5 + 2n$ c. $u_n = 7 - 5n$ d. $u_n = 2 \times (-5)^n$

4. Soit (u_n) une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_0 = -3$ et $r = 5$. La valeur de u_5 est :

a. 22 b. -28 c. 25 d. 5

5. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3 = 21$ et $u_6 = 42$. Les valeurs possibles de r sont :

a. 2 b. 7 c. -7 d. 21

6. Les suites croissantes sont :

a. $u_n = 4n + 5$ b. $v_n = 3^n$ c. $w_n = \sqrt{7}n$ d. $z_n = 4 - \frac{48}{7}n$

7. Les suites ci-dessous sont géométriques :

a. $u_n = 2 \times 4^n$ b. $v_n = \frac{3}{4^{n+1}}$ c. $w_n = 2n$ d. $z_n = 3 \times 2^n - 1$

8. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$. L'expression du terme général est :

a. $u_n = 2 \times 3^{n+1}$ b. $u_n = 2 \times 3^n$ c. $u_n = 3 \times 2^{n+1}$ d. $u_n = 3 \times 2^n$

9. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $q = \frac{7}{2}$. L'expression du terme général est :

a. $u_n = \frac{7}{2} \times 2^{n-1}$ b. $u_n = \frac{7}{2} \times 2^n$ c. $u_n = 2 \times \left(\frac{7}{2}\right)^n$ d. $u_n = 2 \times \left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}$

10. Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_4 = 4$ et $u_6 = 36$. Les valeurs possibles de u_5 sont :

a. -3 b. 3 c. -12 d. 12

11. Les suites croissantes sont :

a. $u_n = 4n + 5$ b. $v_n = 3^n$ c. $w_n = 10 \times 0,5^n$ d. $z_n = 2 \times 1,01^n$

Problèmes**Problème 1** ...*Social network...*

En 2017, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un artiste était de 9000. On suppose que, chaque année, il obtient 1500 fans supplémentaires.

f_n Désigne le nombre d'abonnés en $2017+n$ pour tout entier naturel n .

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2018 et 2019.
2. Exprimer f_{n+1} en fonction de f_n .
3. Quelle est la nature de la suite (f_n) ? En déduire une expression de f_n en fonction de n .
4. Existe-t-il une année pour laquelle le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à 2017 ? Si oui, laquelle ?

Problème 2 ...*Une histoire de notes...*

Manu a 13 de moyenne en mathématiques cette année. À chacun des neuf contrôles de l'année, il a progressé de 1,5 points. Quelle était sa plus mauvaise note de l'année ? On supposera que le coefficient de chaque contrôle est le même.

Problème 3 ...*Pénalité de retard...*

Une entreprise a commandé une machine de 10000€ auprès de l'un de ses fournisseurs. En cas de livraison en retard, des pénalités ont été fixées : le premier jour de retard est facturé 100€, le deuxième jour de retard est facturé 150€ ; le 3^e jour de retard est facturé 200€, et ainsi de suite : chaque jour supplémentaire de retard est facturé 50€ de plus que la journée précédente.

1. Au bout de combien de jours le fournisseur « offre » t-il la machine ?
2. En réalité, la fabrication pour le fournisseur n'est rentabilisée que si les pénalités ne dépassent pas 2500€. Quel est le nombre de jours maximum de retard de livraison pour que le fournisseur rentre dans ses frais ?

Problème 4 ...*Comparaison de crédit...*

Vincent veut emprunter 2500€ pour un achat. Le vendeur lui propose de choisir entre deux formules de crédit sur 12 mois.

Proposition 1 : la première mensualité est de 400€ et chaque mois les mensualités suivantes diminuent de 30€ par rapport au mois précédent.

Proposition 2 : la première mensualité est de 400€ et chaque mois, les mensualités suivantes diminuent de 10% par rapport au mois précédent.

Déterminer quelle est la proposition la plus avantageuse pour Vincent.

Problème 5 ...*Suite royale...*

Un roi décide de répartir son héritage en pièces d'or à ses quatre enfants. Il répartit ainsi les pièces : il donne 200 pièces d'or à l'aîné et il donne à chacun des enfants suivants, la moitié du montant donné à l'enfant précédent plus 40 pièces d'or. À combien de pièces d'or s'élève l'héritage du roi ?

Problème 6 ...*Balle de match...*

Le tournoi de tennis hommes de Roland-Garros se dispute en 7 tours successifs. Combien y avait-il de joueurs au départ et combien de matchs ont été joués ?