Suites arithmétiques

Exercice 1

Déterminer si les suites (u_n) et (v_n) suivantes sont arithmétiques. Si oui, préciser leur raison.

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n = 7 - 6n$.

2. La suite (v_n) est définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $v_n = n^2 - n$.

Exercice 2

Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques. Si oui, préciser leur raison.

1. Pour tout entier n, $u_n = 7 - 4n$.

2. Pour tout entier n, $v_n = n^2 - 1$.

3. Pour tout entier n, $w_n = (n+1)^2 - n^2$.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, dire si la suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, est arithmétique. Si oui, préciser le premier terme et la raison.

1. $u_n = 5n + 1$;

2. $u_n = \dfrac{4n^2 - 1}{2n + 1}$;

3. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$;

4. $u_n = -n^3 + 3n^2$.

Exercice 4

Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial u_p et de raison r. Écrire l'expression du terme général de cette suite dans les cas suivants.

1. $u_0 = -2$ et $r = 3$;

2. $u_2 = 5$ et $r = 0,5$;

3. $u_0 = 0$ et $r = -0,8$;

4. $u_3 = -4$ et $r = 0,9$.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite arithmétique de terme initial $u_0 = 80$ et de raison -6.

1. Écrire l'expression du terme général de cette suite.

2. Calculer u_{10} ainsi que le 10e terme de cette suite.

Exercice 6

1. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_7 = 11$ et $u_{15} = 23$.
Déterminer la raison r et le premier terme u_0 de la suite (u_n).

2. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_6 = 4$ et $u_{20} = 11$.
Déterminer la raison r et le premier terme u_0 de la suite (u_n).

Exercice 7

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = -3$.

1. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer le centième terme de cette suite.

2. Déterminer le seuil n_0 à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs ou égaux à 10000.

Exercice 8

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $0,4$ et telle que $u_7 = 12$. Calculer le terme initial u_0, puis le terme u_{48}.

2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 60 et telle que $u_{60} = 5$. Calculer le terme initial u_1, puis le terme u_{154}.

Exercice 9

Donner le sens de variations de chacune des suites arithmétiques (u_n) suivantes.

1. $u_n = 7 + 4n$;

2. $u_n = 6 - 5n$;

3. $u_n = 5n - 3$;

4. $u_n = -2 - \frac{1}{2}n$;

5. $u_n = -9n + 1$;

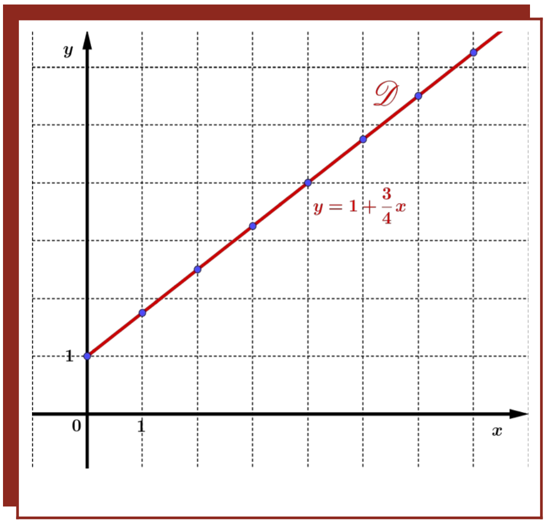
6. $u_n = -\frac{7}{3}n + 6$;

7. $u_n = (n+1)^2 - n^2$;

8. $u_n = 1 + \sqrt{3}n$.

Exercice 10

Soit la suite (u_n) telle que pour tout entier n, les points de coordonnées $(n ; u_n)$ sont alignés sur la droite $\mathscr{D}$ tracée ci-contre.



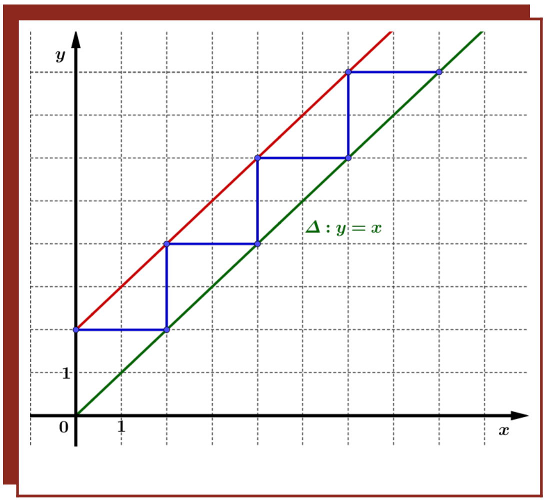
1. Déterminer u_0, u_1, u_2.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Démontrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

Exercice 11

On a représenté ci-dessous la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 0$, définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n.



1. Lire les valeurs u_1, u_2 et u_3.

2. Quelle est la fonction f ?

3. En déduire que la suite (u_n) est arithmétique et en donner la raison.

Exercice 12

Un téléphérique progresse à vitesse constante : À chaque seconde, son altitude augmente de $0,75\,m$. La gare de départ est à une altitude de $1450\,m$.
On appelle a_n l'altitude de la cabine après n secondes de trajet, en mètres.

1. Déterminer les valeurs a_0 , a_1 et a_2 .

2. Montrer que la suite (a_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

3. La durée du trajet est précisément de 15 minutes. Quelle est l'altitude de la gare d'arrivée ?

Exercice 13

Monsieur Dupont désire creuser un puits, au fond de son jardin. Une réserve naturelle d'eau souterraine se situe à 12 mètres de profondeur. Il choisit le devis suivant pour le forage :
Forfait de prise en charge, visite sur le terrain : 40€ TTC/Prix forfaitaire du mètre foré : 150€ TTC.
On note p_n le prix, en euros, pour un forage de n mètres ($n > 0$).

1. Calculer p_1 .

2. Déterminer la nature de la suite (p_n) et en déduire l'expression de p_n en fonction de n .

3. Déterminer le prix à payer pour faire creuser ce puits.

Exercice 14

Une machine industrielle est achetée 5000€. Sa valeur de revente diminue chaque année de 500€.

1. Calculer sa valeur de revente au bout d'une année.

2. On note r_0 sa valeur d'achat et r_n sa valeur de revente au bout de n années.

a. Montrer que (r_n) est une suite arithmétique. Préciser son terme initial et sa raison.

b. Exprimer r_n en fonction de n . Quel est son sens de variations ?

3. Déterminer au bout de combien d'années la valeur de revente sera nulle.

Exercice 15

La 1$^{\text{ère}}$ année d'exploitation, le bénéfice d'une entreprise est de 3000€. Ses bénéfices augmentent chaque année de 15000€. On suppose que cette évolution va se poursuivre les années suivantes.

1. Calculer le bénéfice de l'entreprise la 2$^{\text{e}}$ année.

2. On note b_1 le bénéfice de la 1$^{\text{ère}}$ année et b_n le bénéfice de la n-ième année.

a. Montrer que (b_n) est une suite arithmétique ; préciser son terme initial et sa raison.

b. Exprimer b_n en fonction de n . Quel est son sens de variations ?

3. Déterminer l'année à partir de laquelle le bénéfice sera pour la première fois supérieur à 200000€.

Exercice 16

Soit une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 .
Rappeler l'expression du terme général u_n puis démontrer ce résultat.

Exercice 17

Soit une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 .

1. Rappeler l'expression du terme général u_n .

2. Calculer, pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n$.

3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) selon la valeur r .

Exercice 18
Calculer les sommes suivantes.
1. $S=1+2+3+\ldots+99$; **2.** $S=1+2+3+\ldots+150$; **3.** $S=1+2+3+\ldots+534$.

Exercice 19
1. Calculer les sommes $S_1=1+2+3+\ldots+50$ et $S_2=1+2+3+\ldots+100$.
2. En déduire la somme $S_3=51+52+53+\ldots+100$.

Exercice 20
1. Calculer les sommes suivantes :
a. $S=3+7+11+\ldots+203$; **b.** $S=11+22+33+\ldots+360448$.
2. Quelle est la somme des multiples de 7 compris entre 100 et 2000 ?

Exercice 21
Calculer les sommes suivantes :
1. $S=100+103+106+\ldots+400$; **2.** $S=21+42+63+\ldots+137781$.
3. La somme des multiples de 2 compris entre 100 et 2000.

Exercice 22
Une entreprise parisienne doit envoyer un certain nombre de colis en province. Un transporteur propose les conditions suivantes :
• 98€ pour le premier colis.
• Une réduction de 3€ pour chaque colis supplémentaire.
1. Combien coûte l'envoi de 10 colis ?
2. Le budget transport de l'entreprise est de 50000€. Combien de colis peut envoyer l'entreprise ?

Exercice 23
1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0=5$ et de raison 3.
a. Calculer la somme $S_{10}=u_0+u_1+\ldots+u_{10}$.
b. En déduire la somme $S=u_2+u_3+\ldots+u_{10}$.
2. Calculer la somme S des termes d'une suite arithmétique telle que
$S=1+1{,}5+2+2{,}5+\ldots+99{,}5+100$.

Exercice 24
En 2011, Anne a reçu 80€ d'étrennes. Chaque année, celles-ci augmentent de 6€.
1. Donner les valeurs e_1 et e_2 des étrennes les années 2012 et 2013.
2. Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n .
3. En déduire l'expression de e_n en fonction de n des étrennes l'année $2011+n$.
4. Quelle somme totale aura-t-elle reçue le 31 décembre 2026 ?

Exercice 25
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0=1$ et de raison 3.
1. Donner le terme général de (u_n) .
2. Exprimer la somme $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$ des termes consécutifs de (u_n) en fonction de n .
3. Déterminer n tel que $S_n=145$.

Exercice 26

Pour tout entier n non nul , on appelle :

- S_n la somme des n premiers entiers non nuls : $S_n = 1+2+3+\ldots+n$
- P_n la somme des n premiers entiers pairs non nuls : $P_n = 2+4+6+\ldots+2n$
- I_n la somme des n premiers entiers impairs : $I_n = 1+3+5+\ldots+(2n-1)$

1. Exprimer P_n en fonction de S_n . En déduire l'expression de P_n en fonction de n .
2. Calculer $I_n + P_n$. En déduire l'expression de I_n en fonction de n .

Exercice 27

L'escalier de secours d'un gratte-ciel de 110 étages comporte 18 marches par étage. Jacques est au sommet du gratte-ciel et William au rez-de-chaussée, au bas de l'escalier. Ils décident par téléphone de se rejoindre en partant au même instant. William monte deux marches par seconde (sans s'essouffler !) et Jacques en descend quatre dans le même temps.
On note u_0 , u_1 , u_2 , …, u_n le nombre de marches qui séparent Jacques du bas de l'escalier, respectivement au départ, au bout d'une seconde, de 2 secondes…, de n secondes.
On note v_0 , v_1 , v_2 , …, v_n le nombre de marches qui séparent William du bas de l'escalier, respectivement au départ, au bout d'une seconde, de 2 secondes…, de n secondes.
Ainsi, $u_0 = 1980$ et $v_0 = 0$.
1. Calculer u_1 , u_2 , v_1 et v_2 .
2. Exprimer u_n et v_n en fonction de n .
3. Étudier les variations des suites (u_n) et (v_n) . Interpréter les résultats.
4. À quel instant (en minutes) et à quel étage Jacques et William vont-ils se rencontrer ?

Exercice 28

On dispose au sol des tuyaux cylindriques identiques. Puis on empile une rangée supplémentaire en posant chaque tuyau sur deux tuyaux du niveau inférieur.
1. Si l'on dispose trois tuyaux sur le sol, combien de tuyaux peut-on empiler si l'on continue le procédé aussi longtemps que possible ?
2. Si un empilement de ce type contient 153 tuyaux, quel est le nombre de tuyaux posés sur le sol ?

Exercice 29

Paul fume deux paquets de 20 cigarettes par jour. Il décide enfin d'arrêter, mais progressivement, en fumant chaque jour deux cigarettes de moins que la veille.
1. Combien de jours aura-t-il mis pour arrêter de fumer ?
2. Combien de cigarettes aura-t-il fumées en trop comparé à un arrêt immédiat de la cigarette ?

Exercice 30

On souhaite construire un château de cartes à n niveaux ($n \geqslant 1$).
1. Exprimer le nombre de cartes d'un château à n niveaux en fonction de n .
2. Quelle est la taille du plus grand château que l'on peut fabriquer si l'on dispose de 500 cartes ?

QCM

Pour chaque question, indiquer la ou les bonne(s) réponse(s).

1. Les suites ci-dessous sont arithmétiques :

a. $u_n=3n-\frac{5}{4}$ **b.** $v_n=\frac{3}{4^{n+1}}$ **c.** $w_n=2-\frac{2}{7}n$ **d.** $z_n=3\times 2^n-1$

2. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0=2$ et de raison $r=-5$. L'expression du terme général est :

a. $u_n=2+5n$ **b.** $u_n=2-5n$ **c.** $u_n=5-2n$ **d.** $u_n=5+2n$

3. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_1=2$ et de raison $r=-5$. L'expression du terme général est :

a. $u_n=2-5n$ **b.** $u_n=-5+2n$ **c.** $u_n=7-5n$ **d.** $u_n=2\times(-5)^n$

4. Soit (u_n) une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_0=-3$ et $r=5$. La valeur de u_5 est :

a. 22 **b.** -28 **c.** 25 **d.** 5

5. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3=21$ et $u_6=42$. Les valeurs possibles de r sont :

a. 2 **b.** 7 **c.** -7 **d.** 21

6. Les suites croissantes sont :

a. $u_n=4n+5$ **b.** $v_n=3^n$ **c.** $w_n=\sqrt{7}n$ **d.** $z_n=4-\frac{48}{7}n$

7. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $1,5$ et de premier terme $u_0=4$. Alors la somme $S_{10}=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{10}$ est égale à :

a. 147 **b.** $122,5$ **c.** $126,5$ **d.** 143

8. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 8 et de premier terme $u_{28}=\frac{5}{2}$. Alors la somme des 10 premiers termes de (u_n) est égale à :

a. $310,5$ **b.** $467,5$ **c.** 465 **d.** 385

9. On suppose que la somme des n premiers entiers vaut 10. Les valeurs possibles de n sont :

a. 3 **b.** 4 **c.** 5 **d.** 6

10. La somme $2+4+6+\ldots+20$ est égale à :

a. 110 **b.** $2\times\frac{10\times 11}{2}$ **c.** $\frac{10\times 11}{2}$ **d.** 10×11

Problèmes

Problème 1 *...Social network...*

En 2017, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un artiste était de 9000. On suppose que, chaque année, il obtient 1500 fans supplémentaires.

f_n Désigne le nombre d'abonnés en $2017+n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2018 et 2019.

2. Exprimer f_{n+1} en fonction de f_n.

3. Quelle est la nature de la suite (f_n) ? En déduire une expression de f_n en fonction de n.

4. Existe-t-il une année pour laquelle le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à 2017 ? Si oui, laquelle ?

Problème 2 *...Une histoire de notes...*

Manu a 13 de moyenne en mathématiques cette année. À chacun des neuf contrôles de l'année, il a progressé de $1,5$ points. Quelle était sa plus mauvaise note de l'année ? On supposera que le coefficient de chaque contrôle est le même.

Problème 3 *...Pénalité de retard...*

Une entreprise a commandé une machine de 10000€ auprès de l'un de ses fournisseurs. En cas de livraison en retard, des pénalités ont été fixées : le premier jour de retard est facturé 100€, le deuxième jour de retard est facturé 150€ ; le 3^{e} jour de retard est facturé 200€, et ainsi de suite : chaque jour supplémentaire de retard est facturé 50€ de plus que la journée précédente.

1. Au bout de combien de jours le fournisseur « offre » t-il la machine ?

2. En réalité, la fabrication pour le fournisseur n'est rentabilisée que si les pénalités ne dépassent pas 2500€. Quel est le nombre de jours maximum de retard de livraison pour que le fournisseur rentre dans ses frais ?

Problème 4 *...Empilement de boîtes...*

On range des boîtes de conserve : une première rangée est placée sur le sol, puis on place une seconde rangée de boîtes (une boîte de moins que pour la première rangée) à cheval sur ces boîtes, et ainsi de suite jusqu'à la formation d'une pile d'allure triangulaire. Les boîtes de conserve ont $10\,cm$ de diamètre et $10\,cm$ de hauteur. On note u_0 le nombre de boîtes de la rangée disposée sur le sol, u_1 le nombre de boîtes de la rangée du 1er étage, u_2 le nombre de boîtes du 2^{e} étage…
D'une manière générale, pour $n\geqslant 1$, on note u_n le nombre de boîtes du n-ième étage de la pile.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Exprimer u_n en fonction de n et de u_0.

2. Déterminer le nombre de boîtes que contient une pile ayant 24 boîtes à la base.

3. On veut entreposer une centaine de boîtes dans la pile (par exemple, 105).

a. De quelle largeur, en cm, doit-on disposer à la base ?

b. Quelle sera alors la hauteur de la pile ?

Problème 5 *...Vers le bac...*

On définit la suite (v_n) en posant $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n}$.

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < 3$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

2. Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (v_n).

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

a. Montrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. Déterminer l'expression de w_n, puis celle de v_n, en fonction de n.