

Lois discrètes

Exercice 1

Une boîte de chocolats contient quatre chocolats au lait et six chocolats noirs.

On choisit au hasard un chocolat dans la boîte, puis un deuxième.

1. Cette expérience est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?
2. Quelle est la probabilité de choisir un chocolat de chaque sorte ?

Exercice 2

Une urne contient dix boules blanches et deux boules rouges. On pioche successivement et au hasard trois boules avec remise.

1. Cette expérience est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?
2. À l'aide du produit cartésien, lister les issues possibles.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux boules blanches.

Exercice 3

Une urne contient 20 boules de quatre couleurs différentes : 7 rouges, 10 vertes, 2 jaunes et 1 bleue. On tire deux boules sans remise dans cette urne et on note à chaque fois la couleur obtenue.

1. Cette succession de deux épreuves est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?
2. Représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.
4. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule verte et une boule jaune.
5. Déterminer la probabilité que la première boule soit jaune sachant que la deuxième est rouge.
6. Déterminer la probabilité que la première boule soit verte sachant que la deuxième est bleue.

Exercice 4

Un examen consiste à passer trois épreuves indépendantes.

- Épreuve 1 : on a 80% de chances de réussir.
- Épreuve 2 : on a 60% de chance de réussir.
- Épreuve 3 : on a 75% de chances d'échouer.

On est reçu à l'examen si l'on réussit au moins deux épreuves sur les trois.

Quelle est la probabilité de réussir l'examen ?

Exercice 5

Dans un jeu télévisé, on tire au sort des boules sans remise parmi vingt : 17 boules blanches qui donnent le droit de deviner un mot et 3 boules noires qui font passer la main à l'équipe adverse.

On considère la succession des trois premiers tirages dans ce jeu selon qu'elles sont noires ou non.

1. Est-ce une succession de trois épreuves indépendantes ?
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Quelle est la probabilité de passer la main exactement une fois sur les trois premiers tirages ?

Exercice 6

Un drone A est muni de deux moteurs et un drone B est doté de quatre moteurs. Chaque moteur a la probabilité p de tomber en panne. Les pannes surviennent de façon indépendante.

Chaque drone arrive à destination si et seulement si strictement moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel drone choisir ?

Exercice 7

Dans une urne contenant cinq boules numérotées de 1 à 5, on tire au hasard une boule puis, sans la remettre, on tire une seconde boule. On note b le numéro porté par la première boule et c le numéro porté par la seconde boule.

X est la variable aléatoire qui, à un tirage, associe le nombre de solutions de l'équation :

$$x^2 + bx + c = 0$$

Déterminer la loi de probabilité de X .

Exercice 8

Une urne contient 100 boules. Parmi elles, il y en a 23 blanches, 12 grises, 9 noires, 45 oranges et 11 violettes.

On tire trois boules avec remise dans cette urne et on note à chaque fois la couleur obtenue.

1. Cette expérience est-elle une succession de trois épreuves indépendantes ?
2. Donner l'univers associé à cette expérience.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir, dans cet ordre, une blanche, une grise puis une violette.

Exercice 9

On lance cinq fois successivement un dé équilibré à 4 faces dont les sommets sont numérotés de 1 à 4.

1. Cette expérience est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?
2. Déterminer l'univers associé à cette expérience.
3. On suppose que ce dé est truqué de sorte que $P(1) = 0,4$ et les autres issues sont équiprobables. Calculer la probabilité d'obtenir, dans cet ordre, 1-3-1-2-4.

Exercice 10

On considère deux urnes A et B . L'urne A contient trois jetons jaunes et deux jetons bleus.

L'urne B contient trois jetons noirs, deux rouges et un jaune.

L'expérience consiste à choisir une urne au hasard, puis à choisir un jeton dans l'urne choisie.

On s'intéresse à la couleur du jeton choisi.

1. Cette expérience est-elle une succession de deux épreuves indépendantes ?
2. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Déterminer la probabilité de l'événement J : « Obtenir une boule jaune ».
4. Sachant que l'on a obtenu une boule jaune, quelle est la probabilité que la boule provienne de l'urne A ?
5. On modifie l'expérience en considérant que l'on choisit l'urne A avec une probabilité égal à p . Pour quelle(s) valeur(s) de p la probabilité de l'événement J est-elle maximale ?

Exercice 11

Les expériences aléatoires suivantes sont-elles des épreuves de Bernoulli ? Si oui, préciser leur paramètre (si ce n'est pas clairement indiqué, vous choisirez quelle issue correspond au succès et quelle issue correspond à l'échec).

1. On lance un dé équilibré et on gagne si on fait un 6.
2. On lance un dé tétraédrique et on regarde le résultat obtenu.
3. Un automobiliste arrive à un feu et a une probabilité de 0,3 qu'il soit vert.
4. On tire une boule dans une urne qui contient 4 boules noires et 6 boules rouges. On gagne si elle est noire.

Exercice 12

Dans un parking, on regarde au hasard une des voitures stationnées. Pour chacune des épreuves suivantes, préciser s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli.

1. On regarde si le véhicule est électrique.
2. On regarde la couleur du véhicule.
3. On vérifie si l'immatriculation se termine par un Z.
4. On regarde la longueur du véhicule en centimètre.
5. On regarde si la longueur du véhicule est inférieure ou égale à 450 centimètres.

Exercice 13

Au début d'un jeu de mémoire, seize cartes sont placées face cachée sur une table.

Jennifer retourne une carte qui montre un palmier. Elle sait qu'une autre carte (et seulement une) représente un palmier. Elle doit donc, au hasard, retourner une seconde carte pour espérer retrouver un palmier. Justifier que cette expérience aléatoire correspond à une épreuve de Bernoulli.

Exercice 14

Fiona joue à Pierre-Feuille-Ciseau. Expliquer pourquoi le choix de son adversaire à ce jeu ne peut pas être assimilable à une épreuve de Bernoulli.

Exercice 15

1. Expliquer pourquoi l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce et à regarder si elle tombe sur Pile est une épreuve de Bernoulli.
2. Donner la probabilité d'un succès « Obtenir Pile » dans le cas où la pièce est équilibrée.
3. Donner la probabilité d'un succès « Obtenir Pile » dans le cas où la pièce a deux fois plus de chance de tomber sur un Face que sur un Pile.

Exercice 16

Inventer une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité d'un succès est $0,3$.

Exercice 17

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p=0,4$.

1. Représenter la loi de probabilité de X dans un tableau.
2. Calculer son espérance, sa variance et son écart-type.

Exercice 18

Edwige est employée d'une plate forme téléphonique associée à un fournisseur d'accès à internet. Elle a remarqué qu'elle traite la demande d'un client en moins de deux minutes avec une probabilité de $0,3$ et cela indépendamment des clients précédents.

1. Un client appelle. Justifier que la situation peut se modéliser par une épreuve de Bernoulli. Présenter alors la loi de Bernoulli dans un tableau.
2. Trois clients appellent successivement. Justifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli.
3. Traduire la situation précédente par un arbre pondéré.
4. Calculer la probabilité de l'événement « Edwige a traité chacune des trois demandes en moins de deux minutes ».
5. Écrire les listes qui réalisent l'événement « Pour deux des clients, Edwige n'a pas réussi à traiter leur demande en moins de deux minutes ». En déduire $P(B)$.

Exercice 19

Un QCM est composé de quatre questions indépendantes les unes des autres.

Pour chaque question, cinq réponses sont proposées, dont une seule est exacte. On répond au hasard à chaque question et on s'intéresse aux réponses exactes obtenues à la fin du QCM.

1. Vérifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli.
2. Représenter ce schéma par un arbre pondéré.
3. Calculer la probabilité d'obtenir quatre réponses exactes.
4. Calculer la probabilité que seule la réponse à la troisième question soit exacte.

Exercice 20

On ouvre un livre à une page au hasard et on note si la première lettre écrite dans le texte est une voyelle. On réitère trois fois cette opération de façon indépendante en refermant chaque fois le livre.

1. Vérifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli.
2. Représenter ce schéma par un arbre pondéré.
3. Calculer la probabilité d'obtenir trois fois une voyelle.
4. Calculer la probabilité d'obtenir dans l'ordre une voyelle, une consonne puis une voyelle.

Exercice 21

On considère un jeu de 32 cartes et on tire deux cartes de ce jeu. On s'intéresse à la variable aléatoire X associée au nombre de trèfles obtenus. Dans chacune des situations suivantes, la variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Justifier et si oui, donner ses paramètres.

- a. La 1^{ère} carte tirée n'est pas remise dans le jeu ; b. La 1^{ère} carte tirée est remise dans le jeu.

Exercice 22

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $n=35$ et $p=0,71$.

Calculer chacune des probabilités suivantes en arrondissant à 10^{-3} près :

- | | | |
|------------------|------------------|---------------------|
| 1. $P(X=25)$; | 2. $P(X=2)$; | 3. $P(X \leq 30)$; |
| 4. $P(X < 20)$; | 5. $P(X > 21)$; | 6. $P(X \geq 12)$. |

Exercice 23

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B(100; 0,78)$. Calculer :

- | | | |
|---------------------|---------------------|--------------------------|
| 1. $P(X=42)$; | 2. $P(X \leq 75)$; | 3. $P(X > 79)$; |
| 4. $P(X \geq 74)$; | 5. $P(X < 53)$; | 6. $P(73 < X \leq 81)$. |

Exercice 24

On considère une variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale $B(789; 0,04)$. Calculer :

- | | | |
|-----------------------------|------------------------|---------------------------|
| 1. $P(Y=356)$; | 2. $P(Y \geq 259)$; | 3. $P(Y < 700)$; |
| 4. $P(27 \leq Y \leq 32)$; | 5. $P(30 < Y < 789)$; | 6. $P(19 \leq Y < 521)$. |

Exercice 25

On considère que la probabilité qu'un élève de Terminale ait 18 ans ou plus durant l'année scolaire est 0,67.

1. Dans une classe de Terminale de 35 élèves, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire M donnant le nombre d'élèves de la classe encore mineur à la fin de l'année ?
2. Calculer $P(M=10)$, $P(M=11)$ et $P(M=12)$.
3. En déduire la probabilité qu'il y ait encore entre 10 et 12 élèves de la classe encore mineurs à la fin de l'année.

Exercice 26

Une entreprise dispose d'un parc de 600 ordinateurs neufs. La probabilité que l'un d'entre eux tombe en panne pendant la première année est de $0,1$. La panne de l'un des ordinateurs n'affecte pas les autres machines du parc. Pour les questions qui suivent, vous arrondirez vos résultats à 10^{-3} près.

1. Justifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli.
2. On considère la variable aléatoire X correspondant au nombre d'ordinateurs tombant en panne durant la première année. Quelle est la loi de probabilité de X ?
3. Quelle est la probabilité que 20 appareils tombent en panne la première année ?
4. Quelle est la probabilité que 40 appareils ou moins tombent en panne durant la première année ?

Exercice 27

Un service qualité teste une production de vêtement pour enfant.

Suite à une simulation réalisée sur un échantillon de 500 pyjamas, le service conclut que 90% des pyjamas ne présentent aucun défaut. Un salarié de l'entreprise prend au hasard un pyjama sortant de la production puis le repose. Il fait cette expérience quatre fois.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de pyjamas ayant un défaut parmi les quatre.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
2. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.
3. Déterminer les valeurs prises par X .
4. Donner la loi de probabilité de X dans un tableau. Arrondir les résultats à 10^{-4} près.
5. Calculer $P(X \leq 1)$. Interpréter le résultat.
6. Calculer $P(X > 1)$. Interpréter le résultat.

Exercice 28

La probabilité de gagner à un jeu de grattage est de $0,1$. On considère 1000 joueurs ayant joué à ce jeu dont on suppose que leurs résultats sont indépendants et on appelle G la variable aléatoire donnant le nombre de gagnants parmi ces 1000 joueurs. Vous arrondirez vos résultats à 10^{-3} près.

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait plus de 1000 gagnants.
2. Déterminer la probabilité qu'il y ait moins de 85 gagnants.
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait entre 95 (inclus) et 105 (inclus) gagnants.
4. Déterminer la probabilité qu'il y ait entre 90 (exclu) et 110 (inclus) gagnants.

Exercice 29

1. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0,83$. Calculer son espérance, sa variance et son écart-type. Vous arrondirez à 10^{-3} près.
2. On considère une variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0,79$. Calculer son espérance, sa variance et son écart-type. Vous arrondirez à 10^{-3} près.

Exercice 30

Gabin déjeune cinq jours sur sept dans un fast-food. Trois fois sur cinq, il choisit le menu B (hamburger + frites) et deux fois sur cinq le menu S (salade complète).

On rencontre par hasard Gabin au fast-food trois fois, dans trois semaines différentes, si bien que les trois repas de Gabin sont assimilables à trois expériences identiques et indépendantes.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de menus S parmi ces trois repas.

1. Calculer la probabilité que Gabin ait mangé exactement deux menus « salade ».
2. Déterminer la loi de probabilité de X .
3. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X . Vous arrondirez à $0,001$ près.

Exercise 31

Une entreprise est spécialisée dans la fabrication en série d'un article. Un contrôle de qualité a montré qu'un article produit par cette entreprise était défectueux avec une probabilité égale à 0,05. Une grande surface reçoit 800 articles de cette entreprise. Soit X la variable aléatoire qui, à cette livraison, associe le nombre d'articles défectueux et donc invendables. Le nombre d'articles est suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler cette épreuve à un tirage avec remise. Définir la loi de X et calculer son espérance mathématique. Interpréter alors ce résultat.

Exercice 32

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n=54$ et $p=0,45$. Déterminer le plus petit entier k tel que :

- a.** $P(X \leq k) \geq 0,05$; **b.** $P(X \leq k) > 0,995$.

On considère une variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètres $n=54$ et $p=0,45$. Déterminer le plus petit entier k tel que :

- a.** $P(Y \leq k) \geq 0,025$; **b.** $P(Y \leq k) > 0,975$.

Exercise 33

Dans un lycée, 237 élèves ont réservé un repas à la cantine. Les statistiques montrent que lorsqu'un élève a réservé, 7% du temps il ne mange pas à la cantine.

1. Le personnel de la cantine ne voulant pas gâcher de nourriture souhaite savoir quel est le nombre minimal k de repas à préparer tout en restant sûr à au moins 95% que tous les élèves se présentant auront un repas. Déterminer k .
2. Même question avec un risque que certains élèves n'aient pas de repas inférieur à 1%.

Exercice 34

D'après des études marketing, un certain livre n'est pas apprécié par 15% de ses lecteurs.

Un club de lecture commande 236 exemplaires de ce livre pour ses membres auprès d'un libraire qui lui propose que si plus de k membres n'apprécient pas le livre, alors il fera une réduction de 5% sur la commande. Comment fixer la valeur minimale possible de k afin que le libraire soit sûr de ne pas avoir à faire la réduction, au risque d'erreur de 1% ?

Exercise 35

On fait l'hypothèse qu'une maladie touche 15% de la population.

Afin de tester cette hypothèse, on évalue le cas de 200 personnes dans la population et on trouve que 25 de ces personnes sont touchées par la maladie.

Doit-on rejeter l'hypothèse que 15% de la population est malade, au risque d'erreur de 5% ?

Exercise 36

Soit n un entier naturel et p un réel de l'intervalle $[0; 1]$. On considère une épreuve de Bernoulli donnée de succès et de paramètre p .

On réalise n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes et on note X la variable aléatoire comptant le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès. On dit que X suit une **loi géométrique**.

1. Quelles sont les valeurs prises par X . Établir alors la loi de probabilité de X .

3. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n P(X=k) = 1$.

Problèmes

Problème 1 ...Sécurité aéroportuaire...

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs. On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique. On note S l'événement « Le voyageur fait sonner le portique » et M l'événement « Le voyageur porte un objet métallique ». On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique. On admet que :

- Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à $0,98$;
- Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à $0,98$.

Les deux parties ne sont pas indépendantes.

Partie A

1. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\bar{M}}(\bar{S})$.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Montrer que $P(S)=0,02192$.
4. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. On arrondira le résultat à 10^{-3} .

Partie B

80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes faisant sonner le portique.

1. Justifier soigneusement que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique.
4. Déterminer la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.
5. Donner la valeur du plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,9$. Interpréter le résultat obtenu.

Problème 2 ...Horticulture...

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1 , 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3 .

Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80% de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

On arrondira les résultats si besoin à 10^{-3} près.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

On considère les événements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 » ;
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 » ;
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 » ;
- C : « l'arbre choisi est un conifère » ;
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

- a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
- b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 .
- c. Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à $0,525$.
- d. L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il soit acheté chez l'horticulteur H_1 ?
2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que

ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

- Justifier **soigneusement** que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
- Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
- Déterminer l'espérance de X . Interpréter le résultat.

Problème 3 ...La bonne martingale...

Au casino, Jamila joue à un jeu à quitte ou double, c'est-à-dire que si elle joue x €, son gain algébrique est de $-x$ € si elle perd et de $2x - x = x$ € si elle gagne.

La probabilité de gagner à ce jeu est de $0,49$. Elle adopte alors la stratégie consistant à miser et :

- Si elle gagne, elle quitte le casino ;
- Si elle perd, elle rejoue en misant le double de ce qu'elle avait misé la fois précédente.

Jamila joue avec une première mise de 1000€.

Partie A

- Quelle est la probabilité que Jamila quitte le casino après une partie ?
 - Quelle est la probabilité que Jamila quitte le casino après deux, puis trois parties ?
 - Quelle est la probabilité que Jamila quitte le casino après k parties (où $k \in \mathbb{N}^*$) ?
 - En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(X=k)$ où X est la variable aléatoire comptant le nombre de parties jouées avant de gagner.

Remarque

La variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p=0,49$.

- Quel sera son gain algébrique si elle gagne à la première partie ?
 - Quel sera son gain algébrique si elle gagne à la deuxième, puis troisième partie ?
 - Que peut-on conjecturer sur le gain algébrique quand on gagne à la k -ième partie ?
- On considère la suite (u_n) donnant la somme d'argent mise à la n -ième partie pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Exprimer u_n en fonction de n .
 - En déduire le total des sommes mises entre la première et la n -ième partie.
Démontrer la conjecture faite à la question 2.c.
- On considère la variable aléatoire G donnant le gain algébrique réalisé à ce jeu.
 - Donner la loi de probabilité de G .
 - En quoi cela paraît-il paradoxal ? Expliquer pourquoi cela ne l'est pas réellement (on pourra se demander combien d'argent Jamila aura dépensé au bout de 10 parties).

Partie B

- Jamila dispose de 15000€ pour jouer. Après combien de parties perdues sera-t-elle contrainte d'arrêter de jouer ?
- Représenter à l'aide d'un arbre pondéré la situation.
 - En déduire la loi de la variable aléatoire Y comptant le nombre de parties jouées avant de gagner et où l'on décide par convention de considérer que $Y=0$ si Jamila ne gagne pas.

Remarque

La variable aléatoire Y suit la **loi géométrique tronquée** de paramètres $n=4$ et $p=0,49$.

- Déterminer la loi de la variable aléatoire G' comptant le gain algébrique réalisé à ce jeu puis calculer $E(G')$.
- Reprendre les questions **B.1**, **B.2.b** et **B.2.c** dans le cas où Jamila mise 100€ au départ.
- Discuter des deux stratégies (mise de départ de 1000€ ou 100€).