

Chapitre 7

Loïs discrètes

I. Loi uniforme

Définition 1

Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur** $\{1; 2; \dots; n\}$ si elle prend pour valeurs les entiers 1 à n de manière équiprobable, c'est-à-dire si $P(X=k) = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in \{1; n\}$.

Remarque

Dans ce cas, X prend des valeurs isolées (ici des entiers). On dit que X suit une **loi discrète**. Les autres lois étudiées dans ce chapitre (loi de Bernoulli, binomiale et géométrique) sont également des lois discrètes.

Exemple

On lance un dé cubique équilibré et on considère la variable aléatoire X donnant le résultat obtenu. X suit la loi uniforme sur $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Propriété 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1; 2; \dots; n\}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \bullet E(X) &= \frac{n+1}{2} & \bullet V(X) &= \frac{n^2-1}{12} & \bullet \sigma(X) &= \sqrt{\frac{n^2-1}{12}} \end{aligned}$$

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Exemple

On reprend le lancer de dé cubique et on considère la variable aléatoire X donnant le résultat obtenu qui suit la loi uniforme sur $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Son espérance est $E(X) = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$, sa variance est $V(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12}$ et son écart-type est

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{6^2-1}{12}} = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{\sqrt{105}}{6}.$$

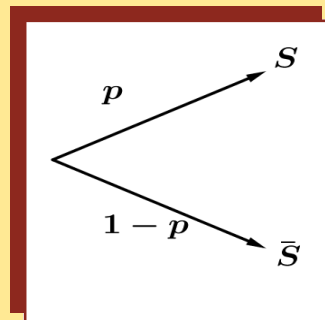
II. Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

II.1 Épreuve de Bernoulli

Définition 3

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p (compris entre 0 et 1) est une expérience aléatoire comportant deux issues :

- l'une appelée succès, noté S , de probabilité p .
- l'autre appelée échec, noté $\bar{S}$ ou E , de probabilité $q=1-p$.

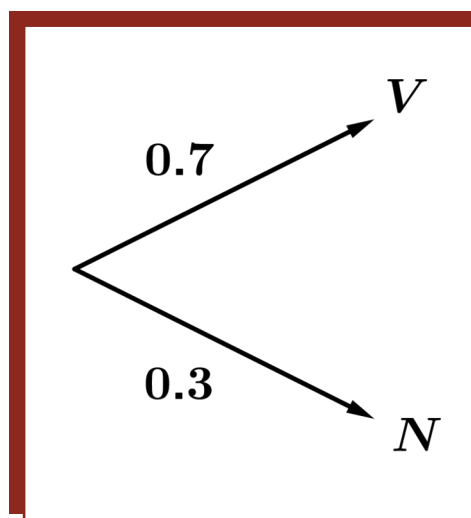


Remarque

Les termes « succès » et « échec » ne sont porteurs d'aucune valeur. Ils désignent simplement, de manière générique, les deux issues possibles. Le choix de ces termes est historiquement issu de la théorie des jeux.

Exemple

Dans un jeu télévisé opposant deux équipes jouant en alternance, chaque participant doit, à certains moments, prélever une boule d'une urne contenant 7 boules vertes et 3 boules noires. Les boules sont indistinguables au toucher et le tirage est équiprobable et avec remise. Si une boule verte est tirée, l'équipe concernée continue de jouer, ce qui est assimilé à un succès. Si une boule noire est tirée, c'est alors l'autre équipe qui joue, ce qui peut être assimilé à un échec. Cette épreuve de Bernoulli est représentée à l'aide de l'arbre pondéré ci-contre :



II.2 Loi de Bernoulli

Définition 4

Notons X la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec.

On dit que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p .

Autrement dit, on a $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$.

On peut résumer la loi de Bernoulli par le tableau suivant :

x_i	1	0
$P(X=x_i)$	p	$1-p$

Propriété 5

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

- L'espérance de X est $E(X) = p$.
- La variance de X est $V(X) = p(1-p)$.
- L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

Démonstration

- On a $E(X) = \sum_{k=1}^2 P(X=x_k)x_k = P(X=1) \times 1 + P(X=0) \times 0 = p \times 1 + (1-p) \times 0 = p$.
- On a $V(X) = \sum_{k=1}^2 P(X=x_k)(x_k - E(X))^2$

$$\begin{aligned}
 &= P(X=1) \times (1 - E(X))^2 + P(X=0) \times (0 - E(X))^2 \\
 &= p(1-p)^2 + ((1-p)(0-p))^2 \\
 &= p(1-p)^2 + (1-p)p^2 \\
 &= p(1-p)(1-p+p) \\
 &= p(1-p)
 \end{aligned}$$
- On a $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p(1-p)}$.

II.3 Schéma de Bernoulli**Définition 6**

Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1.

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est une expérience aléatoire consistant à répéter n fois, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli de paramètre p .

Exemple

On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir un pile est de $\frac{1}{3}$. Chaque lancer est identique et indépendant et on note S le succès « obtenir un Pile ».

On répète alors cinq fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli de succès S dont la probabilité est $\frac{1}{3}$. Cette expérience aléatoire correspond donc à un schéma de Bernoulli

avec $n=5$ et $p=\frac{1}{3}$. La probabilité de l'issue $(P; F; P; P; F)$ est donc :

$$P((P; F; P; P; F)) = P(P) \times P(F) \times P(P) \times P(P) \times P(F) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{243}$$

III. Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

Définition 7

On considère l'arbre associé à un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . Le nombre de chemins dans l'arbre permettant de réaliser k succès est noté $\binom{n}{k}$. Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés les **coefficients binomiaux**.

Exemple

Dans l'expérience aléatoire du lancer de pièce truquée répétée cinq fois, le nombre de chemins permettant d'obtenir deux succès parmi les cinq lancers est $\binom{5}{2} = 10$.

Méthode pour déterminer les coefficients binomiaux avec la calculatrice :

- Casio 35+ et supérieur : Pour calculer $\binom{5}{2}$, dans le menu RUN (calcul), appuyer sur la touche OPTN, puis choisir PROB. Tapez 5, puis choisir nCr, puis taper 2 et EXE.
- TI 82 et supérieur : Pour calculer $\binom{5}{2}$, taper 5, puis appuyer sur la touche MATH, choisir le menu PROB, puis choisir nCr ou Combinaison (version fr), puis taper 2 et ENTER.

Propriété 8

Pour tous n et k entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \bullet \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

Propriété 9 (Propriété de symétrie des coefficients binomiaux)

Pour tous n et k entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Exemple

Pour $n=5$ et $k=2$, on a bien $\binom{5}{2} = 10$ et $\binom{5}{5-2} = \binom{5}{3} = 10$.

Théorème 10 (Relation de Pascal)

Pour tous entiers naturels $n \geq 2$ et k vérifiant $1 \leq k \leq n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Remarque

Ces propriétés permettent de tracer le triangle de Pascal.

- $\binom{n}{0} = 1$ assure que la première colonne ne contient que des 1 ;
- $\binom{n}{n} = 1$ assure que la diagonale ne contient que des 1 ;
- $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ permet de déterminer n'importe quel coefficient binomial à partir de deux connus auparavant. Par exemple, pour $n=5$ et $k=2$, on a :

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Remarque

Concrètement, les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ s'obtiennent à l'aide de la calculatrice ou du triangle de Pascal dès que l'on ne peut plus faire d'arbre (généralement à partir de $n > 4$).

IV. Loi binomiale**Définition 11**

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , correspondant à la répétition de n épreuves identiques et indépendantes et dont la probabilité du succès d'une épreuve est p .

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors de ces n épreuves.

On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p . On note $X \sim B(n; p)$.

Exemple

On reprend l'exemple précédent. On appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de Pile obtenu lors des cinq lancers. X suit donc la loi binomiale $B\left(5; \frac{1}{3}\right)$.

Théorème 12

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

Pour tout entier $k \in [0; n]$, on a $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Démonstration

Dans un schéma de Bernoulli, chaque chemin permettant d'obtenir k succès permet aussi d'obtenir $n-k$ échecs. Chacun de ses chemins a donc pour probabilité $p^k (1-p)^{n-k}$.

Chaque chemin est déterminé par la donnée de ses k succès. Le nombre de chemins menant à k succès est égal au nombre de combinaisons de k parmi n .

Ainsi, on en déduit que $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Exemple

On considère comme un succès le fait de faire un 6 sur un dé équilibré. C'est donc une expérience de Bernoulli. On lance 100 fois de suite ce dé équilibré.

Ces expériences étant répétées 100 fois de manière identique et indépendante, on réalise donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n=100$ et $p=\frac{1}{6}$.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès, c'est à dire le nombre de fois où l'on obtient un 6. X suit donc la loi binomiale $B\left(100; \frac{1}{6}\right)$.

La probabilité qu'on obtienne vingt fois un 6 est alors : $P(X=20) = \binom{100}{20} \left(\frac{1}{6}\right)^{20} \left(\frac{5}{6}\right)^{80} \approx 0,068$.

Il y a donc environ 6,8 % de chance d'obtenir vingt fois un 6 si on lance 100 fois un dé équilibré.

Méthode pour déterminer les probabilités d'une loi binomiale avec la calculatrice :

- Casio 35+ et supérieur : Pour calculer $P(X=20)$ avec X qui suit la loi $B\left(100; \frac{1}{6}\right)$: Choisir le menu STAT, puis DIST, puis BINM, puis Bpd. Rentre les paramètres (" x " vaut ici 20, "NumTrial" vaut ici 100, et " p " vaut $\frac{1}{6}$). Enfin, sélectionner CALC.
- TI 82 et supérieur : Pour calculer $P(X=20)$ avec X qui suit la loi $B\left(100; \frac{1}{6}\right)$: Appuyer sur 2nd+DISTR (au-dessus de la touche var), puis choisissez binompdf ou binomFdp (version Fr.). Complétez ensuite les paramètres (ici nombre d'essais, probabilité de succès et valeur de x). L'ordre des paramètres est donc n , puis p et enfin k .

Propriété 13

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

- L'espérance de X est $E(X) = np$.
- La variance de X est $V(X) = np(1-p)$.
- L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Exemple

Dans l'exemple précédent, on a donc $E(X) = 100 \times \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{50}{3} \approx 16,67$. Ceci signifie que quand on jette 100 fois de suite un dé équilibré, on obtient en moyenne entre 16 et 17 fois le chiffre 6.

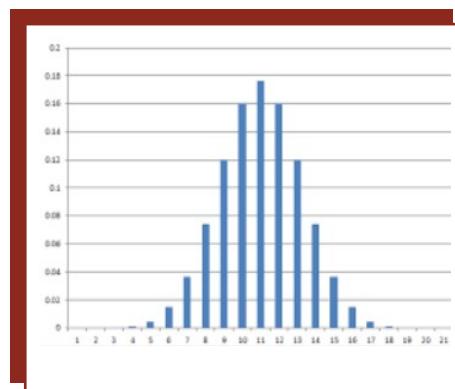
Représentation graphique

On peut représenter graphiquement une loi binomiale par un diagramme en bâtons en mettant en abscisse les valeurs prises par la variable aléatoire et en ordonnée les probabilités correspondantes. Le diagramme en bâtons est en forme de cloche et est approximativement centré sur son espérance.

Exemple

Le diagramme en bâtons associé à la loi $B(40; 0,5)$, sur lequel k varie de 0 à 40 en abscisses, montre, pour chaque valeur de k , la hauteur de la barre correspondant à $P(X=k)$. Par exemple, pour $k=10$, la hauteur de la barre est $P(X=10)=0,16$.

Le diagramme est en forme de cloche et est centré en 11. Or l'espérance vaut $E(X)=40 \times 0,5=20$, ce qui signifie que cette loi binomiale n'est pas centrée sur son espérance.

**Remarque**

Pour des variables aléatoires suivant des lois binomiales de même paramètre n , plus p est éloigné de 0,5 et plus l'écart-type est petit. En conséquence, plus la cloche est « étroite » et « haute ».

V. Échantillonnage

V.1 Intervalle de fluctuation

Définition 14

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 1$ et a et b deux réels.

$[a; b]$ est un **intervalle de fluctuation au seuil de $1-\alpha$** si et seulement si $P(a \leq X \leq b) \geq 1-\alpha$.

Remarques

- On parle aussi de seuil de confiance, de niveau de confiance ou encore de coefficient de confiance.
- Dans la pratique, on cherchera souvent un intervalle dont l'amplitude est la plus petite possible.
- Selon le contexte, l'intervalle est généralement de la forme $[0; k]$, $[k; n]$ ou $[k; k']$.

Propriété 15

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 1$ et a et b deux réels.

L'intervalle $[a; b]$ tel que a et b soient les plus petits entiers vérifiant $P(X \leq a) > \frac{\alpha}{2}$ et

$P(X \leq b) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$ est un **intervalle de fluctuation centré au seuil de $1-\alpha$** associé à X .

V.2 Intervalle de fluctuation au seuil de 95%

Au sein d'une population, on suppose que la proportion d'un certain caractère est p .

On souhaite juger cette hypothèse. Pour cela, on prélève dans la population au hasard et avec remise (ou sans remise si la population étudiée est très grande), un échantillon de taille n sur lequel on observe une fréquence f de ce caractère.

Propriété 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p .

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'une fréquence, sur un échantillon de taille n est :

$$I = \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right] \text{ avec } a : \text{le plus petit entier tel que } P(X \leq a) > 0,025 .$$

$$b : \text{le plus petit entier tel que } P(X \leq b) \geq 0,975 .$$

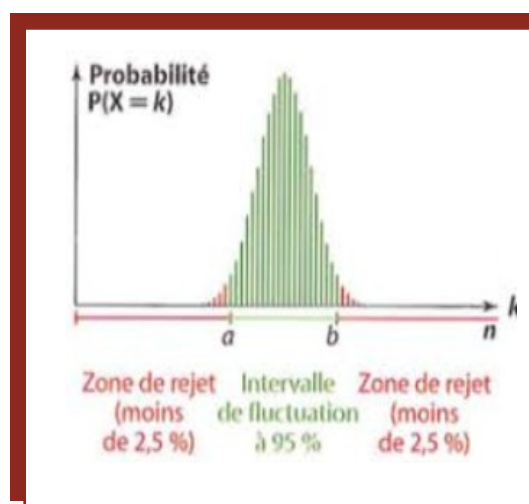
Exemple

Dans le graphique ci-contre, 95% des valeurs se situent entre les réels a et b .

Nécessairement, 5% des valeurs sont

« à l'extérieur ».

Par symétrie, 2,5 % de ces valeurs se situent à gauche de a et 2,5 % à droite de b .

**V.3 Prise de décision**

On fait l'hypothèse que la proportion d'un caractère dans une population est p .

On veut savoir si l'hypothèse est compatible avec l'échantillon étudié.

Prise de décision

Soit I l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% selon la loi binomiale de paramètres n et p et f la fréquence observée du caractère étudié.

- Si $f \notin I$ alors on rejette l'échantillon avec une erreur au seuil de 5%. L'échantillon n'est pas représentatif.
- Si $f \in I$ alors on accepte l'hypothèse au seuil de 95%.

Exemple

On fait l'hypothèse que 55% des électeurs ont voté pour le candidat A. La proportion théorique est donc $p=0,55$. Pour savoir si l'on peut accepter cette hypothèse, on interrogera au hasard 100 personnes à la sortie des urnes pour calculer la fréquence observée. Si la fréquence observée et la proportion théorique ne sont pas trop « éloignées » alors on pourra accepter l'hypothèse avec un risque d'erreur de 5%.

VI. Loi géométrique

VI.1 Définition, probabilité et espérance

Définition 17

On considère une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité d'un succès est p et on répète cette épreuve de Bernoulli de manière indépendante jusqu'à l'obtention d'un succès.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès.

On dit que X suit la **loi géométrique** de paramètre p . On note $X \sim G(p)$.

Exemple

On lance un dé tétraédrique numéroté de 1 à 4 jusqu'à l'obtention d'un 3. La variable aléatoire D comptant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un 3 suit la loi géométrique de paramètre

$$p = \frac{1}{4}.$$

Propriété 18

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\bullet P(X=k) = p(1-p)^{k-1} \quad \bullet P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k \quad \bullet P(X > k) = (1-p)^k$$

Propriété 19

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p et $k \in \mathbb{N}^*$.

Alors l'espérance de X est $E(X) = \frac{1}{p}$.

Exemple

Dans l'exemple précédent, D suit la loi géométrique $G\left(\frac{1}{4}\right)$. La probabilité qu'il faille cinq essais

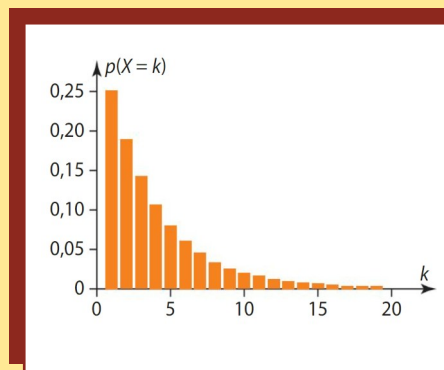
pour obtenir un 3 est $P(D=3) = \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{5-1} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{1024} \approx 0,08$.

L'espérance de la variable aléatoire D est $E(D) = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$. Concrètement, cela signifie que si l'on

recommence un très grand nombre de fois cette succession d'épreuves, alors le nombre moyen d'essais à réaliser afin d'obtenir un 3 est de quatre.

Propriété 20

Pour une variable aléatoire X suivant la loi géométrique $G(p)$, son diagramme en barres associés correspond à une décroissance exponentielle et $P(X=1)$ est la hauteur de la première barre.

**VI.2 Loi sans vieillissement****Définition 21 (Absence de mémoire)**

Une variable aléatoire X suit une loi **sans vieillissement** si pour tous entiers naturels non nuls s et t , on a $P_{X>s}(X>s+t) = P(X>t)$.

Remarque

On dit aussi que la loi géométrique est une loi **sans mémoire**.

Propriété 22

La loi géométrique est une loi sans vieillissement.

Remarque

On admettra que la loi géométrique est la seule loi discrète sans mémoire. Autrement dit, toute variable aléatoire discrète sans vieillissement suit une loi géométrique.

Exemple

Dans l'exemple précédent, la probabilité qu'il faille plus de dix essais, pour obtenir un 3 sachant qu'après sept essais on n'en a pas encore obtenu est :

$$P_{D>7}(D>10) = P_{D>7}(D>7+3) = P(D>3) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} \approx 0,42$$

On a bien utilisé le fait que la probabilité de réussir en plus de dix essais sachant qu'on en a raté sept, c'est-à-dire en plus de trois essais supplémentaires, est la même que la probabilité de réussir en plus de trois essais au départ : les sept premiers essais ont donc été « oubliés ».