

Chapitre 7

Fonctions affines

Définition 1

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$, où a et b sont deux nombres réels.

Remarques

- Lorsque $b=0$, la fonction f définie par $f(x)=ax$ est une fonction linéaire.
- Lorsque $a=0$, la fonction f définie par $f(x)=b$ est une fonction constante.

Exemples

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x+6$ est une fonction affine avec $a=-1$ et $b=6$.
- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-\frac{2}{7}x$ est une fonction linéaire avec $a=-\frac{2}{7}$ et $b=0$.
- La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=3$ est une fonction constante avec $a=0$ et $b=3$.

Propriété 2

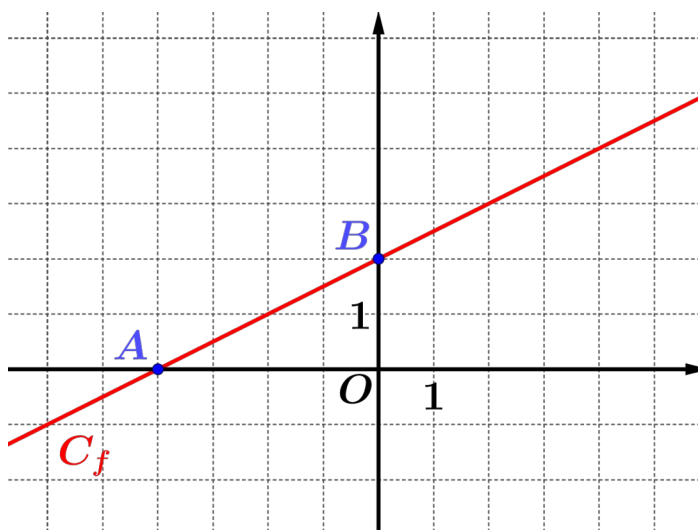
La représentation graphique d'une fonction affine f est une droite. Le réel a s'appelle **coefficient directeur** de la droite et b l'**ordonnée à l'origine**.

Remarques

- Lorsque $b=0$, la droite passe par l'origine du repère.
- Lorsque $a=0$, la droite est parallèle à l'axe des abscisses.

Représentation graphique

La droite représentative d'une fonction affine f passe par les points $A\left(-\frac{b}{a};0\right)$ (à condition que $a \neq 0$) et $B(0;b)$.



On a en effet, $f(0)=a \times 0 + b = b$.

Donc le point de coordonnées $(0; b)$ appartient à C_f .

Et $f(x)=0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$.

Donc le point de coordonnées $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ appartient à C_f .

Théorème 3

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax + b$.

- Si $a > 0$, alors la fonction f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le haut".
- Si $a < 0$, alors la fonction f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le bas".
- Si $a = 0$, alors la fonction f est **constante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est parallèle à l'axe des abscisses.

Propriété 4

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax + b$. On a alors, quels que soient les nombres réels x_1 et x_2 distincts l'un de l'autre :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

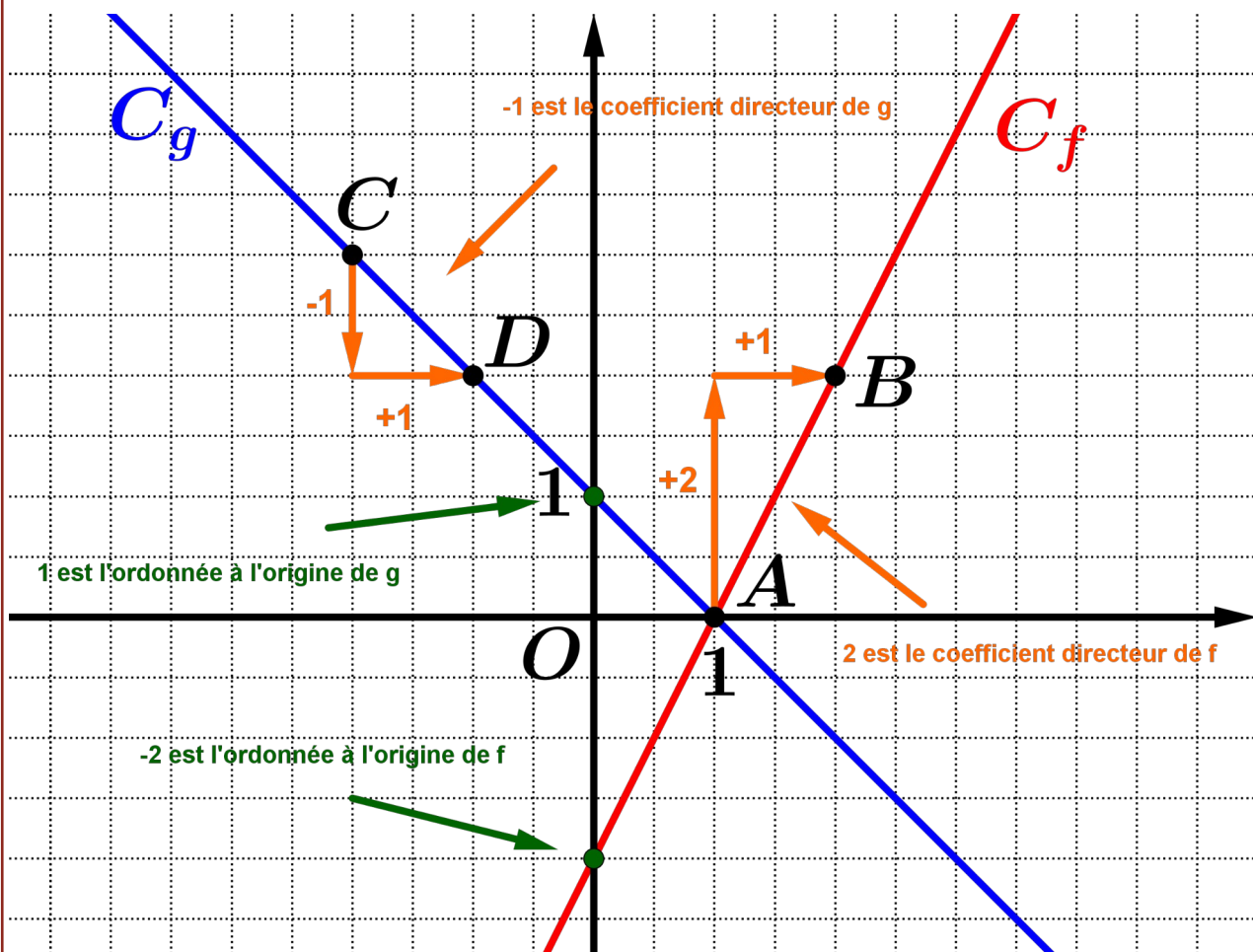
Remarque

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts de la droite représentant une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax + b$.

Alors on a $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Cette formule est identique à celle de la propriété 4 car le point A a pour coordonnées $(x_A; y_A) = (x_A; f(x_A))$.

Méthode : déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine par le graphique



Pour la droite représentative de f :

- Le coefficient directeur est 2 .
- L'ordonnée à l'origine est -2 .

Ainsi l'expression algébrique de f est $f(x) = 2x - 2$.

Pour la droite représentative de g :

- Le coefficient directeur est -1 .
- L'ordonnée à l'origine est 1 .

Ainsi l'expression algébrique de g est $g(x) = -x + 1$.

Méthode : déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine par le calcul

Dans un repère, la représentation graphique correspondant à une fonction affine f passe par les points $A(-2; 4)$ et $B(3; 1)$.

Déterminons par le calcul l'expression algébrique de f .

- On commence par calculer le coefficient directeur a .

$$a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 4}{3 - (-2)} = -\frac{3}{3 + 2} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{D'où } f(x) = -\frac{3}{5}x + b.$$

- On détermine ensuite l'ordonnée à l'origine b .

Le point B appartient à la courbe représentative de f . Donc ses coordonnées vérifient l'expression algébrique de f .

$$\text{On a alors } f(3) = -\frac{3}{5} \times 3 + b \Leftrightarrow 1 = -\frac{9}{5} + b \Leftrightarrow b = 1 + \frac{9}{5} \Leftrightarrow b = \frac{14}{5}.$$

$$\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{14}{5}.$$