

Continuité

I. Notion de continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que f est **continue** sur I si lorsque l'on trace la courbe de la fonction f , on ne lève pas le crayon. On dit qu'il n'y a pas de « saut » dans la représentation graphique de la fonction f .

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel de I .

- La fonction f est **continue en a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- La fonction f est **continue sur I** si elle est continue en tout point de I .

• Les fonctions polynômes, rationnelles, racine carrée, valeur absolue, exponentielle, sinus et cosinus sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

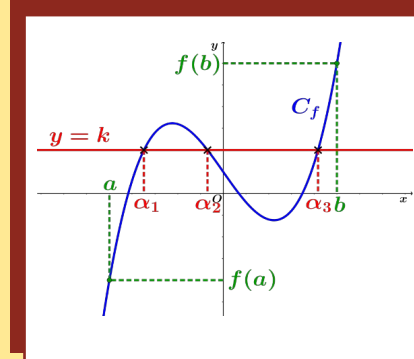
• La somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues sont continues.

Une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est continue sur I .

II. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle $[a; b]$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ **admet au moins une solution** α dans l'intervalle $[a; b]$.



Théorème de Bolzano

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle $[a; b]$.

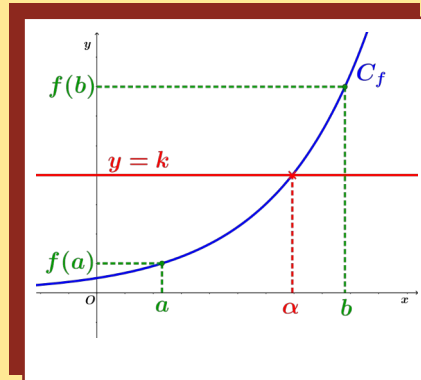
Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe **au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$** .

III. Fonctions continues et strictement monotones

Théorème de la bijection

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$. Alors :

- L'image de l'intervalle $[a; b]$ par la fonction f est l'intervalle $[f(a); f(b)]$.
- Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet **une unique solution** α dans l'intervalle $[a; b]$.



Remarques

- Le terme « bijection » signifie qu'une image par la fonction f n'admet qu'un seul antécédent.
- On appelle aussi ce théorème le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
- Le corollaire s'applique aussi dans le cas d'un intervalle semi ouvert ($[a; b[$ ou $]a; b]$) ou d'un intervalle ouvert ($]a; b[$). On remplace alors le calcul de $f(a)$ (ou de $f(b)$) par le calcul de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (ou de $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$), a et b pouvant être des réels, $-\infty$ ou $+\infty$.
- Ce corollaire permet d'affirmer l'existence d'une unique solution à une équation que l'on ne sait pas résoudre par le calcul. On cherche alors une valeur approchée de cette solution.

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$.
Si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution.

IV. Méthodes

Méthode d'encadrement d'une solution par balayage

Avec la calculatrice on construit un tableau de valeurs de $f(x)$ à partir de $x=a$ avec un pas de 1 (à l'aide des touches « 2nde » et « déf table »).

On peut en déduire l'appartenance de la solution à un intervalle d'amplitude 1. On note $[p; p+1]$ cet intervalle. Puis on fait un tableau de valeurs à partir de $x=p$ avec un pas de 0,1 et on réitère ce procédé en diminuant le pas à chaque étape, jusqu'à obtenir la précision souhaitée.

Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie

Le principe de la dichotomie est de déterminer successivement l'intervalle dans lequel se situe la solution, en divisant par 2 l'amplitude de l'intervalle à chaque étape. Ainsi, on calcule le centre m de l'intervalle et on teste si la solution se trouve dans $[a, m]$ ou $[m; b]$.

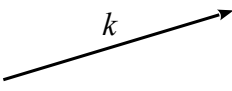
Si la solution est dans $[a, m]$ (respectivement $[m; b]$), on recommence ce procédé dans $[a, m]$ (respectivement $[m; b]$).

Méthode générale de résolution

En pratique, pour montrer que l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution sur $[a;b]$, on peut procéder ainsi :

- On calcule la dérivée de f afin d'obtenir son signe ;
- On construit le tableau de variations de f sur l'intervalle $[a;b]$;
- Chaque « flèche oblique » traduisant la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur un intervalle, on conclut sur l'unicité de la solution.

x	a	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(b)$



Si l'on souhaite donner le signe de f , on détermine les éventuels intervalles où la fonction s'annule, c'est-à-dire les intervalles $[a;b]$ pour lesquels $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

Méthode : Solution d'une équation du type $f(x)=k$

Soit la fonction f définie sur $[2;3]$ par $f(x)=x^3-3x^2+2$.

On souhaite démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[2;3]$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

- On calcule la dérivée de f :

Pour tout $x \in [2;3]$, $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$.

- On étudie le signe de la dérivée de f :

Pour tout $x \in [2;3]$, $3x > 0$ et $x-2 \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$.

Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[2;3]$ (car elle ne s'annule qu'en un point isolé).

- On construit le tableau de variations de f :

x	2	3
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-2	2

$$f(2)=2^3-3 \times 2^2+2=8-12+2=-2 \text{ et } f(3)=3^3-3 \times 3^2+2=27-27+2=2$$

- On utilise le TVI (ou le corollaire) :

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$. De plus, l'image de l'intervalle $[2;3]$ par la fonction f est l'intervalle $[-2;2]$.

Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α .

- On utilise la calculatrice pour déterminer un encadrement de la solution :

X	Y
2	-2
2,1	-1,969
2,2	-1,872
2,3	-1,703
2,4	-1,456
2,5	-1,125
2,6	-0,704
2,7	-0,187
2,8	0,432
2,9	1,159
3	2

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

X	Y
2,7	-0,187
2,71	-0,13
2,72	-0,072
2,73	-0,012
2,74	0,048
2,75	0,1094
2,76	0,1718
2,77	0,2352
2,78	0,2998
2,79	0,3653
2,8	0,432

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74