

Continuité

Exercice 1

La partie entière d'un réel x , notée $E(x)$, est le nombre entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$.

1. Calculer $E(3,4)$, $E(2)$ et $E(-4,6)$.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction partie entière sur l'intervalle $[-5;5]$.
3. Que peut-on conjecturer graphiquement sur la continuité de la fonction E ?
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} E(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x)$. Conclure.

Exercice 2

Justifier la continuité de la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x \sqrt{x}}{x^2 + 1}$ sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$.

Exercice 3

La fonction suivante est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 2 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x+1}{x+2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Exercice 4

1. Démontrer que la fonction valeur absolue est continue en 0 sans être dérivable.
2. Démontrer que la fonction racine carrée est continue en 0 sans être dérivable.

Exercice 5

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |3x - 2|$.

1. Exprimer f en fonction de x sans les valeurs absolues.
2. Déterminer la dérivée de f sur $\left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$.
3. Déterminer la dérivée de f sur $\left] -\infty; \frac{2}{3} \right[$.
4. Montrer que la fonction f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$.

1. Déterminer la dérivée de la fonction f sur $]1; +\infty[$.
2. Déterminer la dérivée de la fonction f sur $] -\infty; 1[$.
3. Calculer la limite du taux de variation de f pour $x > 1$ et $x < 1$. Conclure.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 + e^{x-1} & \text{si } x < 1 \\ x + k & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Trouver la valeur de k telle que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, représenter la courbe de la fonction f et indiquer si la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

$$1. f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} ; \quad 2. f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} ; \quad 3. f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < 3 \\ x-4 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ -2x+13 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}.$$

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x-5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

1. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$.
2. Déduisez-en que f est continue en $x=0$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(x^2 - 2x - 24) & \text{si } x < -3 \text{ ou } x > 5 \\ -\frac{2}{7}(x^2 - 2x - 8) & \text{si } -3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-5; 7]$.
2. Conjecturer le domaine où la fonction est continue.
3. Justifier que la fonction est continue sur ce domaine.
4. Sur quel domaine la fonction f semble-t-elle dérivable ?

Exercice 12

On désigne par f la fonction définie sur $[-4; 7]$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	-4	2	4	7
$f(x)$	-11	3	1,5	13

Déterminer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes :

- a. $f(x) = -8$; b. $f(x) = 2$; c. $f(x) = 15$.

Exercice 13

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2	-1	$+\infty$

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $\mathbb{R}$ et leur signe.

Exercice 14

1. On donne une fonction f continue sur $[-3;5]$. On sait que $f(-1)=1$ et $f(4)=7$. Justifier que l'équation $f(x)=5$ admet au moins une solution sur $[-3;5]$.

2. On donne une fonction g continue sur $[-6;7]$. On sait que $g(-3)=-4$, $g(2)=1$ et $g(5)=-2$. Justifier que l'équation $g(x)=0$ admet au moins deux solutions sur $[-6;7]$.

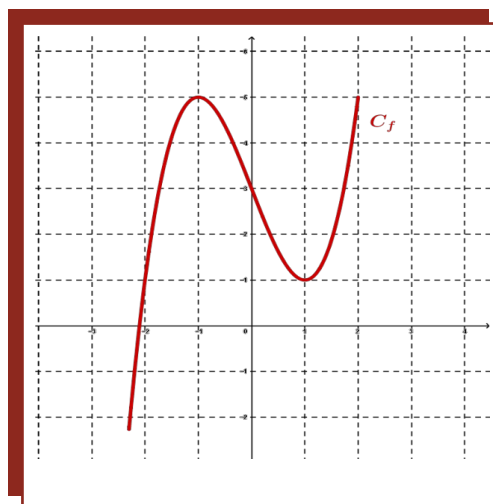
Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $[-2,3;2]$ dont la courbe est donnée ci-contre.

1. Par lecture graphique, expliquer pourquoi l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution, notée α , et donner une valeur approchée de α .

2. On admet dans cette question que $f(x)=x^3-3x+3$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

3. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=2$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

**Exercice 16**

On considère la fonction f définie sur $[-10;10]$ par $f(x)=x^3-3x^2+x+3$.

1. Étudier le sens de variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

2. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[-10;10]$ notée α .

3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près en utilisant la calculatrice.

4. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Exercice 17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-4x^2+6$.

Démontrer que l'équation $f(x)=2$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}-3$.

Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{-x}+1$.

Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19

On considère la fonction f définie sur $[-0,9;10]$ par $f(x) = 3x - 2 + \frac{5}{x+1}$.

1. Calculer la dérivée de f et vérifier que $f'(x) = \frac{3x^2 + 6x - 2}{(x+1)^2}$.
2. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations sur $[-0,9;10]$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet exactement deux solutions qui sont 0 et $\frac{2}{3}$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 5$ admet deux solutions notées α et β .
5. Soit m un réel. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions de $f(x) = m$.

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

1. Développer l'expression $(x-1)^2(x-3)$ et résoudre l'équation $f(x) = 1$.
2. Donner, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. En utilisant le tableau de variations de f , donner, suivant les valeurs de k , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ sur $[0;3]$.

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x-4)e^{-x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un encadrement d'amplitude 0,001 de cette solution.

Exercice 22

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{5-2\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}}$.

On note C_f la courbe de la fonction f dans un repère $(O;I;J)$.

1. Calculer la dérivée de f et vérifier que $f'(x) = \frac{-x-5}{2x\sqrt{x}}$.
2. Étudier le sens de variations de la fonction f .
3. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$ notée α . Donner une valeur approchée de α au millième près.

Exercice 24

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 3}$.

Affirmation 1 : l'équation $x^3 - 3x + 3 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Affirmation 2 : la fonction f est dérivable sur $]\alpha;+\infty[$.

Affirmation 3 : pour tout réel m positif ou nul, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 25

1. On considère la fonction f définie sur $[-3;3]$ par $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$.

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune des solutions.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune des solutions.

3. Démontrer que l'équation $x\sqrt{2x} = 2 - 2x$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.

Exercice 26

Soit la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Déterminer la dérivée g' puis dresser le tableau complet de variations de g .

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et tel que $1 < \alpha < 2$.

3. Déterminer un encadrement à 10^{-3} près de α .

4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Déterminer la fonction dérivée de f .

3. Démontrer que pour tout $x \in] -1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$.

4. Déterminer le signe de f' puis dresser le tableau de variation de f sur $] -1; +\infty[$.

Exercice 27

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps.

On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,04t}}$$

où $h(t)$, en mètres, représente la hauteur du plant en fonction du temps t , en jours.

Les constantes a et b sont des réels positifs.

On sait qu'à $t=0$, le plant mesure $0,1\text{ m}$ et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m .

1. Déterminer a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs.

2. Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

3. Démontrer que l'équation $h(t) = 1,5$ admet une unique solution t_0 .

4. À l'aide d'un algorithme, donner, au jour près, le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à $1,5\text{ m}$.

Problèmes

Problème 1 ...Vrai ou faux...

Soit g une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-5; 10]$. On appelle C_g la courbe représentative de g dans un repère donné du plan.

On donne ci-dessous le tableau de variations de g :

x	-5	-2	-1	4	10
$g(x)$	12	-10	0	5	1

$\swarrow$ $\nearrow$ $\nearrow$ $\searrow$

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si la proposition est vraie, fausse ou si les informations données ne permettent pas de répondre.

- Pour tout réel $x \in [-1; 10]$, $g(x) \leq 5$.
- Pour tout réel $x \in [-1; 10]$, $g'(x) \geq 0$.
- Pour tout réel $x \in [-2; 4]$, $g'(x) \geq 0$.
- L'équation $g(x) = 6$ n'admet aucune solution sur l'intervalle $[-5; 10]$.
- L'équation $g(x) = -8$ admet deux solutions sur $[-5; 10]$.
- L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-5; 10]$.
- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_g au point d'abscisse -1 est positif ou nul.
- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_g au point d'abscisse 5 est négatif ou nul.

Problème 2 ...Étude à l'aide d'une fonction auxiliaire...

Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

- Soit la fonction g définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 e^x - 1$. Étudier le sens de variations de la fonction g et déterminer sa limite en $+\infty$. On dressera son tableau de variations.
- Démontrer qu'il existe un unique réel α dans $[0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
- Déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près.
- Déterminer le signe de la fonction g sur $[0; +\infty[$.

Partie B : Étude de la fonction f

- Déterminer les limites de la fonction f en 0 et $+\infty$.
- On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Démontrer que pour tout réel strictement positif, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

- En déduire le sens de variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}$.
- Justifier que $3,43 < m < 3,45$.