

# Chapitre 6

## Continuité

### I. Notion de continuité

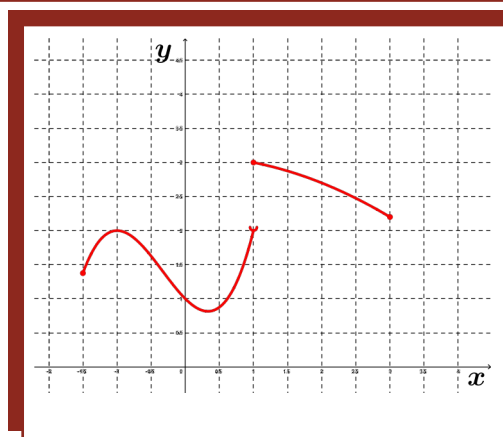
#### Définition 1

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est **continue** sur  $I$  si lorsque l'on trace la courbe de la fonction  $f$ , on ne lève pas le crayon. On dit qu'il n'y a pas de « saut » dans la représentation graphique de la fonction  $f$ .

#### Exemple

La fonction  $f$  définie sur  $[-1, 5; 3]$  représentée ci-contre n'est pas une fonction continue sur  $[-1, 5; 3]$  puisqu'elle n'est pas continue en 1.

La fonction  $f$  est continue sur  $[-1, 5; 1[$ ,  $f$  est continue sur  $[1; 3]$  ou encore  $f$  est continue sur  $[-1, 5; 0, 5]$ .



#### Définition 2

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $a$  un réel de  $I$ . La fonction  $f$  est **continue en  $a$**  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

#### Définition 3

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est **continue sur  $I$**  si elle est continue en tout point de  $I$ .

#### Exemple

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ .

La fonction  $f$  n'est pas continue en 2.

En effet, on a  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2^2 = 4$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2^2 = 4$  mais  $f(2) = 3$ .

#### Propriété 4

- Les fonctions polynômes, rationnelles, racine carrée, valeur absolue, exponentielle, sinus et cosinus sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.
- La somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues sont continues.

**Démonstration**

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

**Exemples**

- La fonction  $x \mapsto x^3 - 5x + 3$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  comme somme de telles fonctions.
- La fonction  $x \mapsto \frac{2x-1}{x^2+1}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  comme quotient, défini sur  $\mathbb{R}$ , de deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction  $x \mapsto \frac{x-2}{x-1}$  est continue sur  $]-\infty; 1[$  et  $]1; +\infty[$  mais elle n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction  $x \mapsto \sqrt{2x-4}$  est continue sur  $[2; +\infty[$  comme racine carrée d'une fonction continue et positive sur  $[2; +\infty[$ .

**Remarque**

Dans un tableau de variations, il est convenu que les flèches obliques indiquent que la fonction est continue et strictement monotone.

**Théorème 5**

Toute fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  est continue sur  $I$ .

**Démonstration**

On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur un intervalle  $I$ .

Soit  $x$  et  $a$  deux réels appartenant à  $I$ .

Pour tout  $x \neq a$ , on a  $f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a)$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$  et puisque  $f$  est dérivable en  $a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ .

D'où  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = f'(a) \times 0 = 0$ .

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  et que  $f$  est continue en  $a$ .

Ceci étant vrai pour tout réel  $a$  de  $I$ , il en découle que la fonction  $f$  est continue sur  $I$ .

**Attention!**

La réciproque de ce théorème est fautive. Une fonction continue n'est pas forcément dérivable. C'est le cas de la fonction racine carrée en zéro et de la fonction valeur absolue en zéro.

En effet, la fonction racine carrée est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et donc continue sur  $]0; +\infty[$ . Elle n'est cependant pas dérivable en 0 car son taux d'accroissement en 0 a pour limite  $+\infty$ . En revanche  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ , donc la fonction racine carrée est continue en 0, et donc sur  $[0; +\infty[$ .

Il est en de même pour la fonction valeur absolue :

On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$ .

Donc la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Or  $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = |0| = 0$ .

Donc la fonction valeur absolue est continue en 0.

## II. Théorème des valeurs intermédiaires

### Théorème 6 (TVI)

Soit  $f$  une fonction définie et **continue** sur un intervalle  $[a; b]$ . Alors pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x)=k$  **admet au moins une solution**  $\alpha$  dans l'intervalle  $[a; b]$ .

### Démonstration

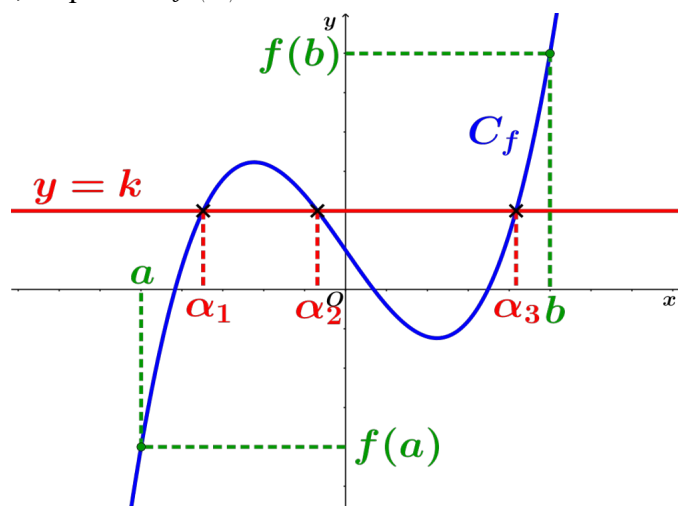
L'idée de la démonstration est d'encadrer  $k$  dans des intervalles d'amplitudes de plus en plus petite par un procédé de dichotomie et de montrer l'existence d'une solution par la continuité de la fonction  $f$  par passage à la limite.

### Remarques

- La continuité de la fonction  $f$  est une hypothèse essentielle du théorème des valeurs intermédiaires. Si la fonction  $f$  n'est pas continue, il est possible qu'il n'existe aucune solution à l'équation  $f(x)=k$ .
- Le théorème des valeurs intermédiaires permet de déterminer l'existence de solution(s) d'une équation, mais il ne permet pas d'en déterminer la (les) valeur(s).
- Dans le cas où  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires alors l'équation  $f(x)=0$  admet au moins une solution dans l'intervalle  $[a; b]$ .

### Exemple

Sur la figure ci-dessous, l'équation  $f(x)=k$  admet trois solutions sur l'intervalle  $[a; b]$ .



### Théorème 7 (théorème de Bolzano)

Soit  $f$  une fonction définie et **continue** sur un intervalle  $[a; b]$ .  
Si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires, alors il existe **au moins un réel c compris entre a et b tel que  $f(c)=0$** .

### Démonstration

C'est une conséquence directe du théorème des valeurs intermédiaires.

**Exemple**

Démontrons que l'équation  $e^{2x+1} = x + 5$  admet au moins une solution dans  $\mathbb{R}$ .

On a  $e^{2x+1} = x + 5 \Leftrightarrow e^{2x+1} - x - 5 = 0$ . Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{2x+1} - x - 5$ .

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que composée de telles fonctions.

D'après la calculatrice, il semble que la fonction change de signe sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

On a  $f(0) = e^{2 \times 0 + 1} - 0 - 5 = e - 5 \approx -2,3 < 0$  et  $f(1) = e^{2 \times 1 + 1} - 1 - 5 = e^3 - 6 \approx 14,1 > 0$ .

Donc 0 est compris entre  $f(0)$  et  $f(1)$ .

Donc d'après le théorème de Bolzano, l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $\mathbb{R}$ .

Ainsi l'équation  $e^{2x+1} = x + 5$  admet au moins une solution dans  $\mathbb{R}$ .

**III. Fonctions continues et strictement monotones****Théorème 8 (Théorème de la bijection)**

Soit  $f$  une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle  $[a; b]$ . Alors :

- L'image de l'intervalle  $[a; b]$  par la fonction  $f$  est l'intervalle  $[f(a); f(b)]$ .
- Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet **une unique solution**  $\alpha$  dans l'intervalle  $[a; b]$ .

**Démonstration**

Ce théorème se démontre en deux temps : existence et unicité.

- Existence

L'existence d'une solution est démontrée à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

- Unicité

On montre l'unicité par l'absurde. Supposons que l'équation  $f(x) = k$  admette deux solutions distinctes  $c_1$  et  $c_2$ , avec  $c_1 < c_2$ .

• Si la fonction est strictement croissante, alors  $f(c_1) < f(c_2)$ . Or ceci est contradictoire avec le fait que  $f(c_1) = f(c_2) = k$ .

• Si la fonction est strictement décroissante, alors  $f(c_1) > f(c_2)$ . Or ceci est contradictoire avec le fait que  $f(c_1) = f(c_2) = k$ .

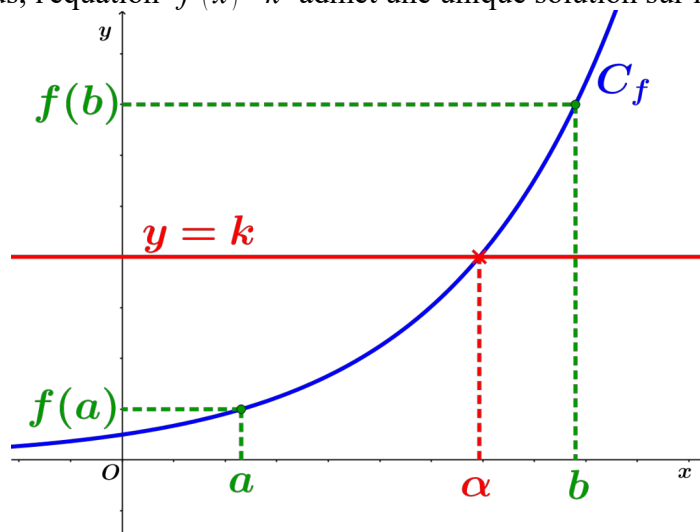
Ainsi l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution.

**Remarques**

- Le terme « bijection » signifie qu'une image par la fonction  $f$  n'admet qu'un seul antécédent.
- On appelle aussi ce théorème le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
- Le corollaire s'applique aussi dans le cas d'un intervalle semi ouvert ( $[a; b[$  ou  $]a; b]$ ) ou d'un intervalle ouvert ( $]a; b[$ ). On remplace alors le calcul de  $f(a)$  (ou de  $f(b)$ ) par le calcul de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  (ou de  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ ),  $a$  et  $b$  pouvant être des réels,  $-\infty$  ou  $+\infty$ .
- Ce corollaire permet d'affirmer l'existence d'une unique solution à une équation que l'on ne sait pas résoudre par le calcul. On cherche alors une valeur approchée de cette solution.

**Exemple**

Sur la figure ci-dessous, l'équation  $f(x)=k$  admet une unique solution sur l'intervalle  $[a;b]$ .

**Propriété 9**

Soit  $f$  une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle  $[a;b]$ .  
Si  $f(a) \times f(b) < 0$ , alors l'équation  $f(x)=0$  admet **une unique solution**.

**Démonstration**

Cette propriété est une conséquence directe du théorème de la bijection.

**Remarque**

L'hypothèse  $f(a) \times f(b) < 0$  implique que  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires et non nuls.  
Donc 0 appartient à l'intervalle  $[f(a); f(b)]$  (ou  $[f(b); f(a)]$ ).

**IV. Méthodes****Méthode d'encadrement d'une solution par balayage**

Avec la calculatrice on construit un tableau de valeurs de  $f(x)$  à partir de  $x=a$  avec un pas de 1 (à l'aide des touches « 2nde » et « déf table »).

On peut en déduire l'appartenance de la solution à un intervalle d'amplitude 1. On note  $[p; p+1]$  cet intervalle. Puis on fait un tableau de valeurs à partir de  $x=p$  avec un pas de 0,1 et on réitère ce procédé en diminuant le pas à chaque étape, jusqu'à obtenir la précision souhaitée.

**Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie**

Le principe de la dichotomie est de déterminer successivement l'intervalle dans lequel se situe la solution, en divisant par 2 l'amplitude de l'intervalle à chaque étape. Ainsi, on calcule le centre  $m$  de l'intervalle et on teste si la solution se trouve dans  $[a, m]$  ou  $[m, b]$ .

Si la solution est dans  $[a, m]$  (respectivement  $[m, b]$ ), on recommence ce procédé dans  $[a, m]$  (respectivement  $[m, b]$ ).

Voici un algorithme de dichotomie permettant d'avoir une précision de l'équation  $f(x)=0$  :

```
Prompt A , B , E
While B - A ≥ E
  (A + B) / 2 → M
  A → X
  Y → F
  M → X
  Y → G
If F × G ≤ 0
Then
  M → B
Else
  M → A
End
End
Disp A , B
```

On saisira à la place de Y l'expression de la fonction  $f$ .

**Méthode générale de résolution**

En pratique, pour montrer que l'équation  $f(x)=k$  admet une unique solution sur  $[a; b]$ , on peut procéder ainsi :

- On calcule la dérivée de  $f$  afin d'obtenir son signe ;
- On construit le tableau de variations de  $f$  sur l'intervalle  $[a; b]$  ;
- Chaque « flèche oblique » traduisant la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur un intervalle, on conclut sur l'unicité de la solution.

| $x$    | $a$    | $b$    |
|--------|--------|--------|
| $f(x)$ | $f(a)$ | $f(b)$ |

Si l'on souhaite donner le signe de  $f$ , on détermine les éventuels intervalles où la fonction s'annule, c'est-à-dire les intervalles  $[a; b]$  pour lesquels  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires.

**Méthode : Solution d'une équation du type  $f(x)=k$** 

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[2;3]$  par  $f(x)=x^3-3x^2+2$ .

On souhaite démontrer que l'équation  $f(x)=0$  admet une unique solution dans  $[2;3]$  et donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de cette solution.

- On calcule la dérivée de  $f$  :

Pour tout  $x \in [2;3]$ ,  $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ .

- On étudie le signe de la dérivée de  $f$  :

Pour tout  $x \in [2;3]$ ,  $3x > 0$  et  $x-2 \geq 0$ , donc  $f'(x) \geq 0$ .

Donc  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[2;3]$  (car elle ne s'annule qu'en un point isolé).

- On construit le tableau de variations de  $f$  :

|         |    |   |
|---------|----|---|
| $x$     | 2  | 3 |
| $f'(x)$ | +  |   |
| $f(x)$  | -2 | 2 |

$$f(2)=2^3-3 \times 2^2+2=8-12+2=-2 \text{ et } f(3)=3^3-3 \times 3^2+2=27-27+2=2$$

- On utilise le TVI (ou le corollaire) :

La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[2;3]$ . De plus, l'image de l'intervalle  $[2;3]$  par la fonction  $f$  est l'intervalle  $[-2;2]$ .

Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation  $f(x)=0$  admet une unique solution  $\alpha$ .

- On utilise la calculatrice pour déterminer un encadrement de la solution :

| X   | Y      |
|-----|--------|
| 2   | -2     |
| 2,1 | -1,969 |
| 2,2 | -1,872 |
| 2,3 | -1,703 |
| 2,4 | -1,456 |
| 2,5 | -1,125 |
| 2,6 | -0,704 |
| 2,7 | -0,187 |
| 2,8 | 0,432  |
| 2,9 | 1,159  |
| 3   | 2      |

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

| X    | Y      |
|------|--------|
| 2,7  | -0,187 |
| 2,71 | -0,13  |
| 2,72 | -0,072 |
| 2,73 | -0,012 |
| 2,74 | 0,048  |
| 2,75 | 0,1094 |
| 2,76 | 0,1718 |
| 2,77 | 0,2352 |
| 2,78 | 0,2998 |
| 2,79 | 0,3653 |
| 2,8  | 0,432  |

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74