

Dérivation

I. Nombre dérivé

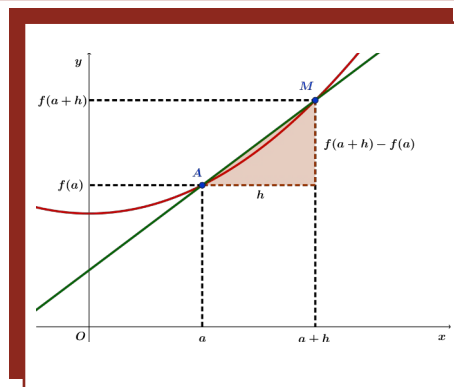
I.1 Taux d'accroissement

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant les réels a et b . Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le réel défini par le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Le **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$ est $\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Remarques

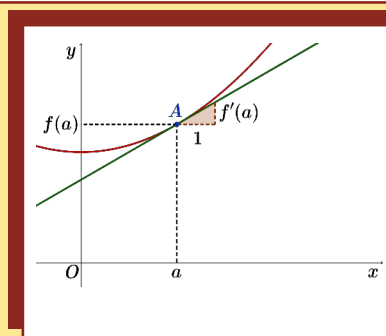
- $\tau(0)$ n'existe pas, mais on va s'intéresser aux valeurs de $\tau(h)$ lorsque h se rapproche de plus en plus de 0.
 - Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est le **coefficient directeur** de la droite (AM) avec $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$.
- On appelle cette droite une **sécante** à la courbe.



I.2 Nombre dérivé

Si, lorsque h se rapproche le plus possible de 0, $\tau(h)$ semble valoir une valeur réelle, on dit que f est dérivable en a . Cette valeur réelle est appelée **nombre dérivé** de f en a , et est notée $f'(a)$. On écrit alors : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h)$, soit $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

On constate que, lorsque h tend vers 0, les sécantes en A tendent vers une droite particulière, nommée **tangente** à C_f en A : aux alentours du point $A(a, f(a))$, elle est semblable à la courbe.



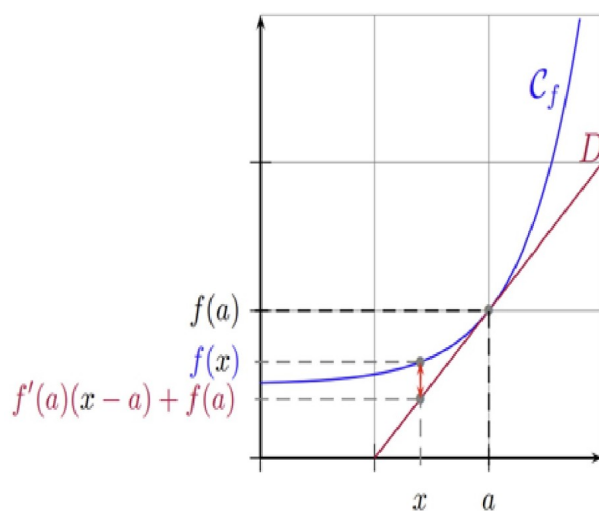
Lorsque f est dérivable en a , on appelle **tangente** à la courbe C_f au point d'abscisse a la droite T passant par $A(a, f(a))$ dont le **coefficient directeur est le nombre dérivé** $f'(a)$.

Soit f une fonction dérivable en a . L'**équation** de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse a est : $T: y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

I.3 Approximation linéaire

Soit f une fonction dérivable en a .
 On appelle fonction **affine tangente de f en a** la fonction $x \rightarrow f'(a)(x-a) + f(a)$.
 Pour tout x proche de a , on a :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$



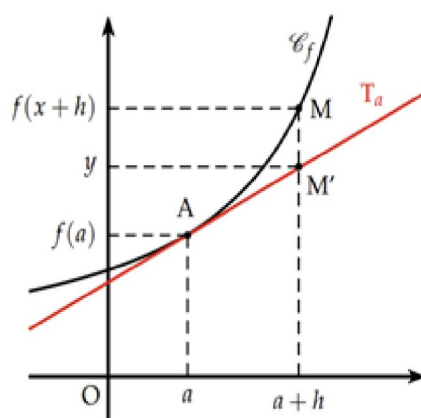
Remarques

- Il s'agit de l'**approximation affine (ou linéaire) de f en a** ou l'**approximation polynomiale à l'ordre 1 de f en a** .
- Si f est deux fois dérivable, alors pour tout $x \in I$ proche de a , on a :

$$f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a)$$

Il s'agit de l'**approximation polynomiale à l'ordre 2 de f en a** , où f'' est la dérivée seconde de f (soit la dérivée de la fonction f').

Soit f une fonction dérivable en a .
 On pose $x = a+h$ avec h proche de 0.
 Si on confond le point M avec le point M' ,
 on a $y \approx f(a+h)$. Alors $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.
 $f(a) + f'(a)h$ est donc une **approximation linéaire de $f(a+h)$** .



II. Fonction dérivée

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I .

On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à chaque x associe $f'(x)$.

Remarques

Toutes les fonctions usuelles vues en première sont dérivables sur leur domaine de définition, à l'exception des fonctions racine carrée et valeur absolue en 0.

- La tangente à la courbe représentative de la fonction racine carrée au point de coordonnées $(0; 0)$ est verticale (c'est l'axe des ordonnées), d'équation $x=0$. Elle n'a donc pas de coefficient directeur. $f'(0)$ n'existe pas. La fonction racine carrée n'est donc dérivable que sur $]0; +\infty[$.
- La fonction valeur absolue n'est également pas dérivable en 0 : en effet, elle n'admet pas de tangente en ce point, du fait de l'angle droit qu'elle y fait. Ainsi, une courbe n'admet pas toujours une tangente en chacun de ses points.

III. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	D_f	Fonction dérivée	$D_{f'}$
$f(x)=k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=mx+p$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=m$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x)=x^n, n \geq 1$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}, n \geq 1$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=e^x$	$\mathbb{R}$

IV. Premières opérations sur les dérivées

Soit f une **fonction polynomiale** de la forme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ définie sur $\mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \neq 0$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$.

Fonction	Fonction dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$u - v$	$u' - v'$
$\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'$