

Dérivation**Exercice 1**

Soit h un nombre réel non nul. Le taux d'accroissement entre 4 et $4+h$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est $2+h$. La fonction f est-elle dérivable en 4 ? Si oui, quel est son nombre dérivé en 4 ?

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et h un nombre réel non nul.

On sait que $\frac{f(-7+h)-f(-7)}{h} = \frac{5}{3}(4h+9)$.

Peut-on dire que la fonction f est dérivable en -7 ? Si oui, déterminer $f'(-7)$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-5$.

1. Calculer $f(1+h)$ et $f(1)$ pour $h \neq 0$.
2. Montrer que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x$.

1. Calculer $f(1+h)$ et $f(1)$ pour $h \neq 0$.
2. Montrer que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-3$.

1. Déterminer le taux d'accroissement de f en $a=1$. Calculer alors le nombre dérivé en $a=1$.
2. Reprendre la question précédente avec $a=3$.

Exercice 6

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et x un nombre réel proche de 3 mais différent de 3.

On sait que $\frac{g(x)-g(3)}{x-3} = 2x+3$.

Peut-on dire que la fonction g est dérivable en 3 ? Si oui, déterminer $g'(3)$.

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, calculer le taux d'accroissement de la fonction f en a et sa limite quand h tend vers 0 ($h \neq 0$). En déduire que f est dérivable en a et préciser $f'(a)$.

- | | |
|--|------------------------------|
| 1. $f(x)=2x-5$ et $a=6$; | 2. $g(x)=-2x+15$ et $a=-2$; |
| 3. $h(x)=x-3$ et a réel quelconque ; | 4. $i(x)=x^2-5$ et $a=1$; |
| 5. $j(x)=-2x^2+x$ et $a=-2$; | 6. $k(x)=x^2-x+2$ et $a=0$. |

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$.

1. Montrer que le taux d'accroissement de f en -2 est $\tau(h)=h^2-6h+12$.
2. En déduire le nombre dérivé en -2 .

Exercice 9

Un véhicule décrit un mouvement rectiligne. La distance parcourue, en mètres, depuis le temps $t=0$ jusqu'au temps t , en secondes, est $d(t)=t^2+5t$.

1. a. Calculer $\frac{d(h)-d(0)}{h}$ pour $h>0$.
 b. Déterminer la vitesse instantanée $d'(0)$ de ce véhicule au temps $t=0$.
2. Déterminer sa vitesse instantanée à $t=10$ s.

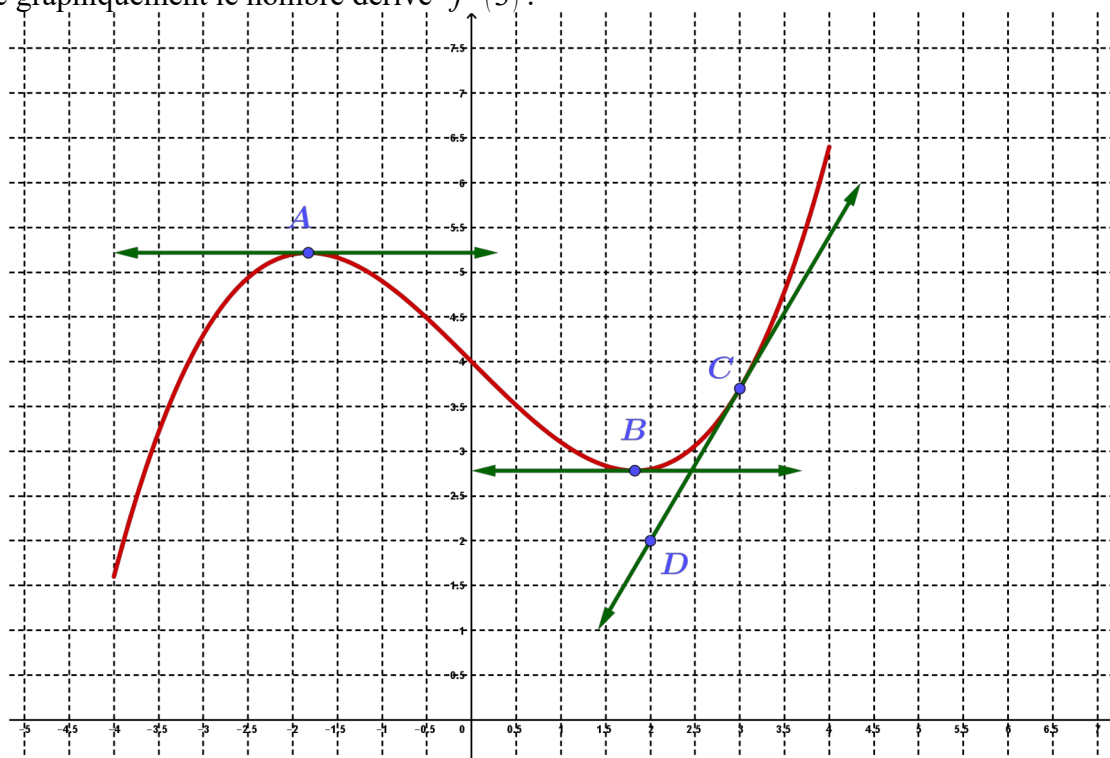
Exercice 10

1. Montrer que pour tous nombres réels a et b , on a $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
2. Pour h différent de 0, simplifier l'expression $\frac{(10+h)^3-10^3}{h}$.
3. En déduire le nombre dérivé de la fonction $x \rightarrow x^3$ en 10.

Exercice 11

On a tracé ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f et ses tangentes en $A(-1,83; 5,22)$, $B(1,83; 2,78)$ et $C(3; 3,7)$.

1. Lire graphiquement les nombres dérivés $f'(-1,83)$ et $f'(1,83)$.
2. Lire graphiquement le nombre dérivé $f'(3)$.



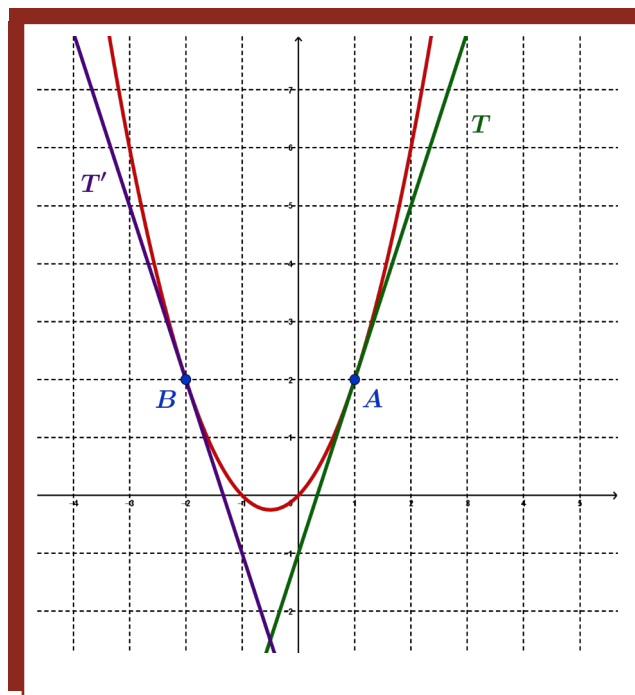
Exercice 12

1. Soit C_f la courbe représentative d'une fonction f dérivable en -1 . On sait que $f(-1)=2$ et $f'(-1)=-3$. Écrire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse -1 .
2. Soit C_g la courbe représentative d'une fonction g dérivable en 2. On sait que $g(2)=-3$ et $g'(2)=1$. Écrire une équation de la tangente T' à C_g au point d'abscisse 2.

Exercice 13

On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + x$. On donne le point $A(1; 2)$ par lequel passe la tangente T .

1. Déterminer graphiquement le nombre dérivé en 1 puis vérifier ce résultat par le calcul.
2. Déterminer alors une équation de la tangente T .
3. Déterminer graphiquement le nombre dérivé en -2 puis vérifier ce résultat par le calcul.
4. Déterminer alors une équation de la tangente T' .
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre T et T' .



Exercice 14

1. Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(4) = -1$ et $f'(4) = 2$. Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 4.
2. Soit une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(-3) = 7$ et $g'(-3) = -4$. Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_g au point d'abscisse -3 .

Exercice 15

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On donne pour certaines valeurs de la variable x , la valeur $f(x)$ et le nombre dérivé de f en x .

x	0	2	4	6
$f(x)$	1	-2	-3	-2
$f'(x)$	-2	-1	0	1

1. Placer dans un repère les points connus de la courbe représentative de f .
2. Tracer les tangentes en ces points.
3. Donner une allure possible de la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 16

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On donne pour certaines valeurs de la variable x , la valeur et $g(x)$ le nombre dérivé de g en x .

x	-2	1	2	6
$g(x)$	4	7	5	-5
$g'(x)$	1	0	-2	0

Reprendre les questions de l'exercice précédent.

Exercice 17

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Déterminer une équation de la tangente Δ_1 au point d'abscisse 2.
2. Déterminer une équation de la tangente Δ_2 au point d'abscisse 0. Aurait-on pu prévoir ce résultat ?

Exercice 18

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont la courbe représentative C_f passe par le point $A(2;3)$ et de nombre dérivé -4 en $x=2$.

Déterminer une équation de la tangente à C_f au point A puis tracer cette tangente.

Exercice 19

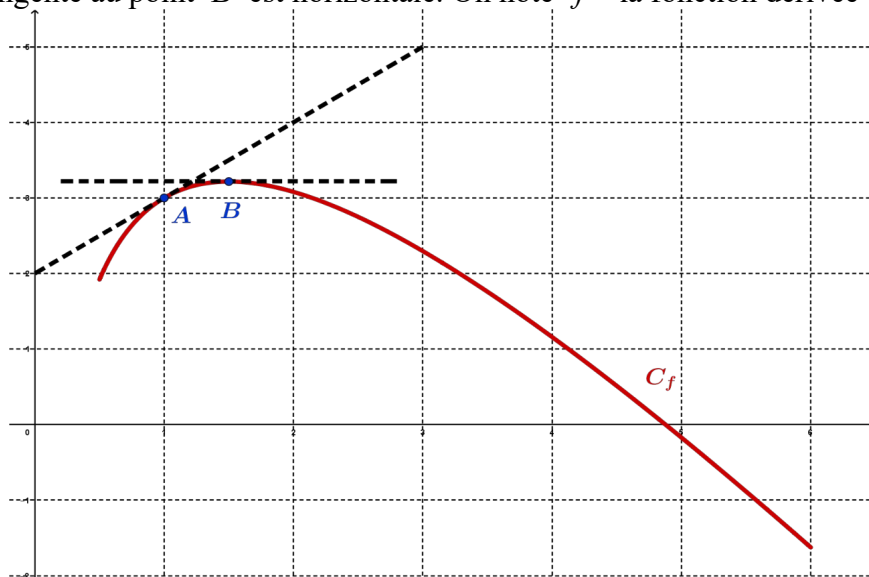
Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont la courbe représentative C_g passe par le point $A(3\sqrt{2}; -2)$ et de nombre dérivé $\sqrt{2}$ en $x=3\sqrt{2}$.

Déterminer une équation de la tangente à C_g au point A puis tracer cette tangente.

Exercice 20

La courbe C_f ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0; 5; 6]$. Les points $A(1; 3)$ et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe C_f .

Les tangentes à la courbe C_f aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale. On note f' la fonction dérivée de f .



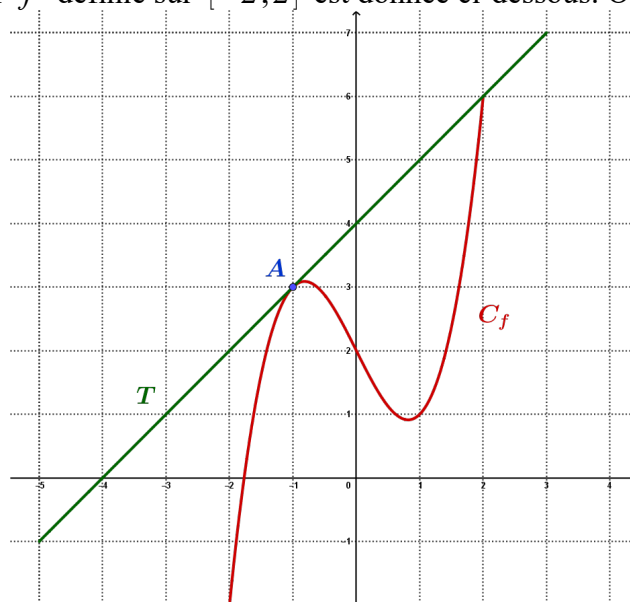
1. Que vaut $f(1,5)$? Et $f(1)$? (On arrondira les résultats si besoin).
2. Déterminer $f'(1,5)$.
3. En déduire l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 1,5.
4. La tangente à la courbe C_f passant par A passe par le point de coordonnées $(0; 2)$. Déterminer une équation de cette tangente.

Exercice 21

La droite d d'équation $y = 2x + 3$ est tangente à la courbe de la fonction f en son point d'abscisse -1 . Déterminer $f(-1)$ et $f'(-1)$.

Exercice 22

La courbe d'une fonction f définie sur $[-2; 2]$ est donnée ci-dessous. On donne $A(-1; 3)$.



Déterminer graphiquement l'équation réduite de la tangente T à C_f passant par A .

Exercice 23

Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont la courbe représentative C_h passe par les points

$A(-2; 0)$, $B(1; -3)$ et $C(21; 20)$. Le nombre dérivé de h en $x = -2$ vaut $-\frac{1}{2}$, celui en $x = 1$ vaut 2 et celui en $x = 21$ vaut 1. Les tangentes à C_h en A , B et C sont-elles concourantes ?

Exercice 24

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Calculer le nombre dérivé de f en -2 .
2. Déterminer une approximation de $f(-2+h)$ lorsque h est proche de 0.
3. En déduire une valeur approchée de $h(-2, 01)$.

Exercice 25

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1. Calculer le nombre dérivé de f en 2.
2. Déterminer une approximation de $f(2+h)$ lorsque h est proche de 0.
3. En déduire une valeur approchée de $2,01^3$ et de $1,999^3$.

Exercice 26

1. Démontrer que la fonction dérivée de $f(x) = mx + p$ (avec m et p des réels) est $f'(x) = m$.
2. Démontrer que la fonction dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$.
3. Démontrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ admet comme dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Exercice 27

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f , sa dérivée f' et l'ensemble de dérivabilité de f .

1. $f(x)=4$;
2. $f(x)=2x$;
3. $f(x)=-6x+1$;
4. $f(x)=\frac{3}{2}x-4$;
5. $f(x)=x^2$;
6. $f(x)=x^3$;
7. $f(x)=x^7$;
8. $f(x)=\frac{1}{x}$;
9. $f(x)=\frac{1}{x^8}$;
10. $f(x)=\sqrt{x}$;
11. $f(x)=x^{-5}$;
12. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 28

Dans chacun des cas, déterminer le nombre dérivé en $x=-4$ puis en $x=0,01$.

1. $f(x)=-4$;
2. $g(x)=\sqrt{x}$;
3. $h(x)=x^2$.

Exercice 29

Soit f la fonction carrée.

1. Donner sa dérivée. Calculer alors les nombres dérivés $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-1)$ et $f'(-3)$.
2. Déterminer une équation de la tangente T en $x=-1$.

Exercice 30

Dans chacun des cas, déterminer le nombre dérivé en 2 puis une équation de la tangente T en 2.

1. $f(x)=5x+2$;
2. $g(x)=\frac{1}{x}$;
3. $h(x)=x^3$;
4. $i(x)=\sqrt{x}$.

Exercice 31

La courbe C_f est la représentation graphique de la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$. Déterminer une équation de la tangente à C_f en son point d'abscisse -2 .

Exercice 32

Soit la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f'(4)$.
2. Donner l'expression de l'approximation linéaire de f au voisinage de 4.
3. Utiliser cette approximation pour estimer $\sqrt{4,1}$.

Exercice 33

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer le nombre dérivé de f en 1.
2. Déterminer l'équation de la tangente à C_f en 1.
3. En déduire une approximation affine de $f(1+h)$.
4. En déduire une valeur approchée de $\frac{1}{0,99}$.

Exercice 34

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et C_f sa courbe représentative.

1. A est le point d'abscisse 1 de la courbe C_f . Déterminer une équation de la tangente T à C_f en A .
2. Tracer la courbe C_f et la tangente T .
3. Existe-t-il une tangente à C_f parallèle à la droite d d'équation $y=3x-4$? Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact.

Exercice 35

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O;I;J)$. Soit a un nombre réel non nul. On appellera T_a la tangente en a à C_f et T_{-a} la tangente en $-a$.

Montrer que les droites T_a et T_{-a} sont parallèles et qu'elles coupent respectivement l'axe des ordonnées en deux points symétriques par rapport à O .

Exercice 36

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f , sa dérivée f' et l'ensemble de dérivabilité de f .

- | | | |
|---------------------------------|------------------------------------|--|
| 1. $f(x)=x^2+\sqrt{x}$; | 2. $f(x)=\frac{-4}{x}$; | 3. $f(x)=3x^2-4x+1$; |
| 4. $f(x)=x^2+1$; | 5. $f(x)=x^2+\sqrt{x}+4$; | 6. $f(x)=x^3-x$; |
| 7. $f(x)=-3\sqrt{x}$; | 8. $f(x)=\frac{-2}{x}$; | 9. $f(x)=2x^2+3$; |
| 10. $f(x)=\frac{1}{x}+x^3$; | 11. $f(x)=\frac{x^4+3x^2-5x}{4}$; | 12. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$; |
| 13. $f(x)=\frac{x^2}{4}+2x+5$; | 14. $f(x)=-x^3+\sqrt{2}x^2+4x$; | 15. $f(x)=\frac{4x-1}{3}$; |
| 16. $f(x)=x^5-2x^3+9x^2+4$; | 17. $f(x)=-2x^7+5x^4+5x^2-8$; | 18. $f(x)=3x^5+x^2$; |
| 19. $f(x)=\sin(x)-5x^2$; | 20. $f(x)=\sin(5x+6)-\sqrt{x}$; | 21. $f(x)=x^2-\cos(x)$. |

QCM

Pour chaque question, indiquer la ou les bonne(s) réponse(s).

1. Soit h un nombre réel non nul. Si g est une fonction dérivable en -2 , alors le nombre dérivé de g en -2 est :

a. $\frac{g(-2+h)-g(-2)}{h}$

b. $h-2$

c. $g(-2+h)$

d. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-2+h)-g(-2)}{h}$

2. Pour $h \neq 0$, le taux d'accroissement de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 1$, entre 2 et $2+h$, est :

a. $h+4$

b. 5

c. h

d. 4

3. Si g est une fonction telle que, pour tout réel h non nul, $\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = -h^2 + 3h - 2$, alors :

a. g est dérivable en 1 et $g'(1) = 0$

b. g n'est pas dérivable en 1

c. g est dérivable en 1 et $g'(1) = -2$

d. g n'est pas dérivable en 1 car $g'(1) = 0$

4. Si la tangente à la courbe C_f au point $D(2; -1)$ passe par le point $O(0; 0)$, alors :

a. $f'(2) = 0$

b. $f'(2) = -\frac{1}{2}$

c. $f'(2) = -1$

d. $f'(2) = 1$

5. La tangente à C_f au point d'abscisse -1 a pour équation $y = 2x - 1$. Alors :

a. $f(-1) = -1$

b. $f'(-1) = -1$

c. $f(-1) = 2$

d. $f'(-1) = 2$

6. On donne $f'(-2) = -4$ et $f(-2) = -1$. L'équation réduite de la tangente à C_f en -2 est :

a. $y = -4x - 1$

b. $y = -4x - 9$

c. $y = -4x + 9$

d. $y = -4x + 7$

7. Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Alors f est dérivable sur :

a. $[0; +\infty[$

b. $]0; +\infty[$

c. $[0; +\infty]$

d. $]0; +\infty]$

8. Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Alors :

a. $f'(4) = \frac{1}{4}$

b. $f'(1) = 1$

c. $f'(2) = \frac{1}{2}$

d. $f'(1) = -\frac{1}{2}$

9. Si f est définie sur I , alors f' est définie sur I :

a. Vrai

b. Faux

10. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

a. $f'(0) = 0$

b. $f'(1) = -1$

c. $f'(x) = 3x^2$

d. $f'(x) = x^2$

Problèmes**Problème 1** ...*Dérivabilité de la valeur absolue...*

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

1. Exprimer f en fonction de x sans les valeurs absolues.
2. Déterminer la dérivée de f sur $]0; +\infty[$.
3. Déterminer la dérivée de f sur $]-\infty; 0[$.
4. Montrer que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Problème 2 ...*Dérivabilité d'une valeur absolue...*

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |3x - 2|$.

1. Exprimer f en fonction de x sans les valeurs absolues.
2. Déterminer la dérivée de f sur $\left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$.
3. Déterminer la dérivée de f sur $\left] -\infty; \frac{2}{3} \right[$.
4. Montrer que la fonction f n'est pas dérivable en $\frac{2}{3}$.

Problème 3 ...*Dérivabilité d'une composée...*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$.

1. Déterminer la dérivée de la fonction f sur $]1; +\infty[$.
2. Déterminer la dérivée de la fonction f sur $]-\infty; 1[$.
3. Calculer la limite du taux de variation de f pour $x > 1$ et $x < 1$. Conclure.

Problème 4 ...*Vitesse d'une particule...*

Une particule évolue de façon rectiligne au cours du temps. Sa position x en fonction du temps est donnée par l'équation $x(t) = 3t^2 + 9t + 8$ où $x(t)$ exprime (en mètre) la distance parcourue par la particule au temps t (en seconde). La vitesse de la particule en fonction du temps est donnée (en mètre par seconde) par la fonction dérivée de la fonction x . On note $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

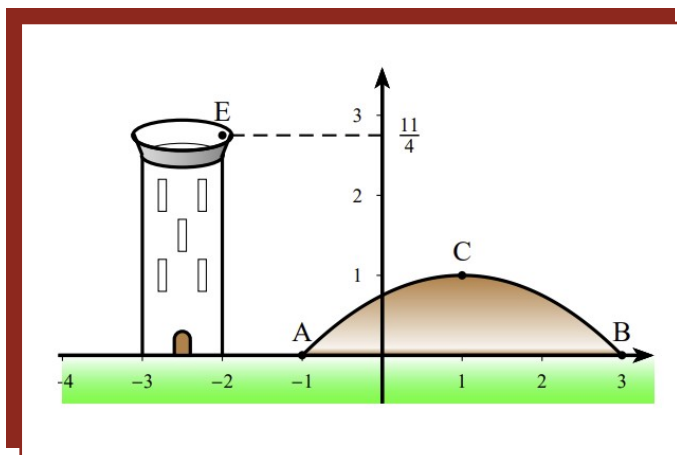
1. Quelle est la vitesse de la particule lorsque $t = 2$?
2. Quelle est la position de la particule lorsque $v(t) = 10$?

Problème 5 ...Angle mort...

Sur la figure ci-contre, « l'arc » de parabole ABC représente une colline, où le point C est son sommet et le sol est symbolisé par l'axe des abscisses.

Un observateur est placé en $E\left(-2; \frac{11}{4}\right)$.

Le but de cet exercice est de déterminer les points de la colline et ceux du sol (au-delà de la colline) qui ne sont pas visibles du point d'observation E.



On note f la fonction définie sur $[-1; 3]$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Déterminer a , b , c pour que « l'arc » ABC soit la représentation de f .

Le point $C(1; 1)$

2. a. Reproduire la figure et indiquer sur la figure les points de la colline et ceux du sol qui ne sont pas visibles de E.

b. Faire les calculs nécessaires pour trouver les abscisses de ces points.