

Chapitre 5

Repérage dans le plan

I. Droites remarquables du triangle et trigonométrie

I.1 Médiatrice

Définition 1

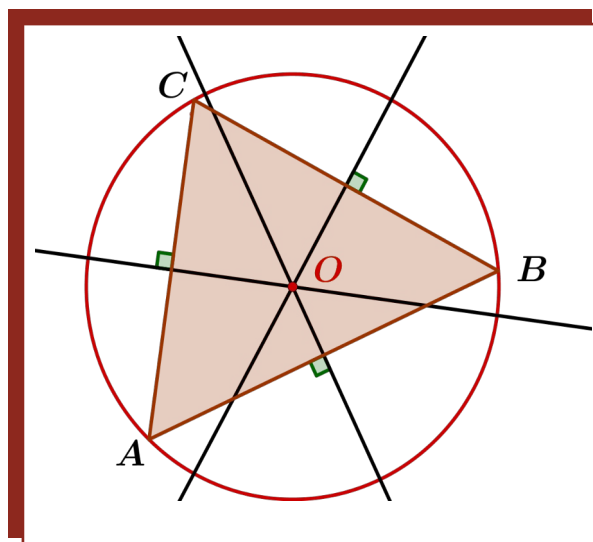
Une **médiatrice** d'un triangle est **une droite perpendiculaire à un côté et passant par son milieu**.

Propriété 2

Les trois médiatrices d'un triangle sont **concurrentes en un point équidistant de chacun des sommets** du triangle.

On a $OA = OB = OC$.

Ce point est appelé **centre du cercle circonscrit** au triangle.



I.2 Médiane

Définition 3

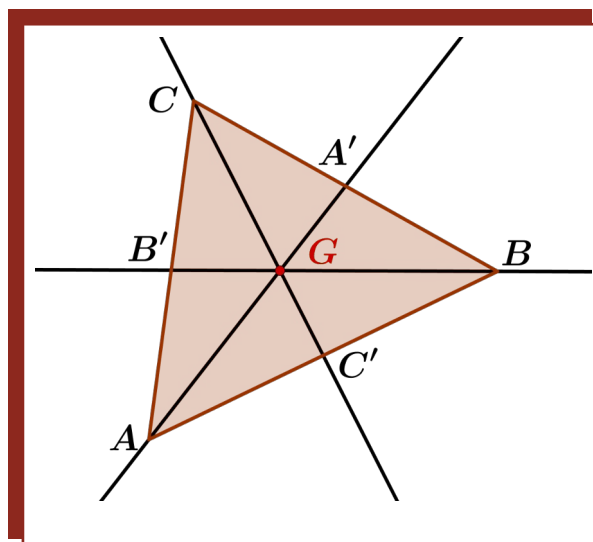
Une **médiane** d'un triangle est **une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé**.

Propriété 4

Les trois médianes d'un triangle sont **concurrentes en un point G** appelé **centre de gravité** du triangle.

Ce point G est situé au deux tiers de chaque médiane en partant du sommet :

$$AG = \frac{2}{3} AA', \quad BG = \frac{2}{3} BB' \quad \text{et} \quad CG = \frac{2}{3} CC'$$



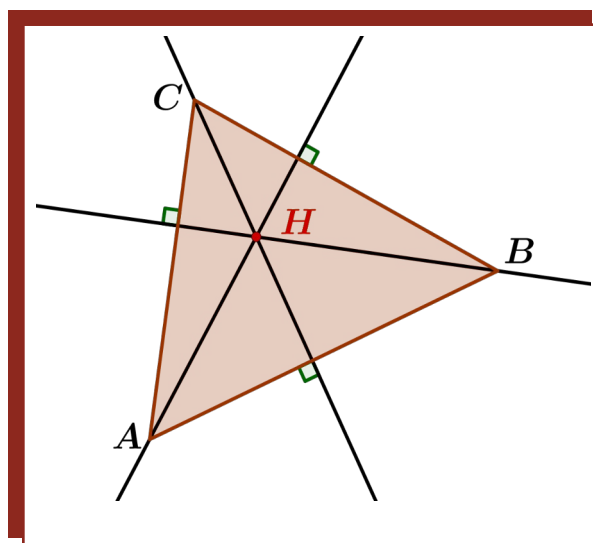
I.3 Hauteur

Définition 5

Une **hauteur** d'un triangle est **une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé**.

Propriété 6

Les trois hauteurs d'un triangle sont **concurrentes** en un point appelé **orthocentre** du triangle. Il est noté H .



I.4 Trigonométrie

Définition 7

Soit ABC un triangle rectangle en A . On définit alors le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$ de la façon suivante :

- $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AB}{BC}$
- $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AC}{BC}$
- $\tan(\widehat{ABC}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB}$

Exemple

Soit le triangle ABC rectangle en A tel que $AB=4$, $AC=3$ et $BC=5$.

On a $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8$, $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6$ et $\tan(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4} = 0,75$.

Remarque

On peut déterminer la mesure d'un angle grâce aux relations de trigonométrie.

Dans l'exemple précédent, en utilisant le « arccos » (ou le $\cos^{-1}$ dans la calculatrice) à la valeur $\frac{4}{5}$, on trouve l'angle $\widehat{ABC}$. On a $\widehat{ABC} \approx 37^\circ$.

On peut faire de même en utilisant le « arcsin » (ou le $\sin^{-1}$) à la valeur $\frac{3}{5}$ ou encore le « arctan »

(ou le $\tan^{-1}$) à la valeur $\frac{3}{4}$.

II. Coordonnées dans le plan

Définition 8

Définir un **repère du plan** consiste à choisir trois points non alignés dans un ordre précis : O , I et J . On note ce repère $(O; I, J)$ et :

Le point O est l'**origine** du repère.

La droite (OI) est l'**axe des abscisses** et le point I donne l'unité sur cet axe.

La droite (OJ) est l'**axe des ordonnées** et le point J donne l'unité sur cet axe.

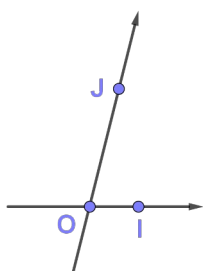
Définition 9

Si le triangle OIJ n'a aucune propriété particulière, le repère $(O; I, J)$ est dit **quelconque**.

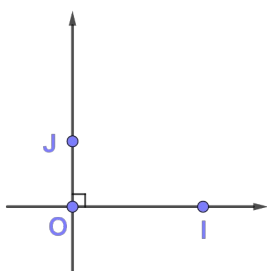
Si le triangle OIJ est rectangle en O , le repère $(O; I, J)$ est dit **orthogonal**. Les axes du repère sont alors perpendiculaires.

Si le triangle OIJ est isocèle en O , le repère $(O; I, J)$ est dit **normé**. L'unité est la même sur les deux axes.

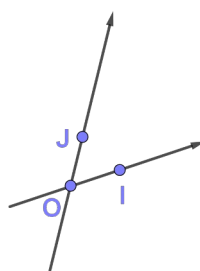
Si le triangle OIJ est rectangle isocèle en O , le repère $(O; I, J)$ est dit **orthonormé**. Les axes du repère sont alors perpendiculaires et l'unité est la même sur les deux axes.



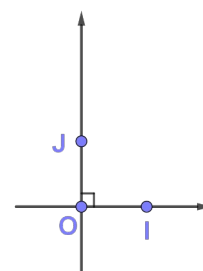
Repère quelconque



Repère orthogonal



Repère normé



Repère orthonormé

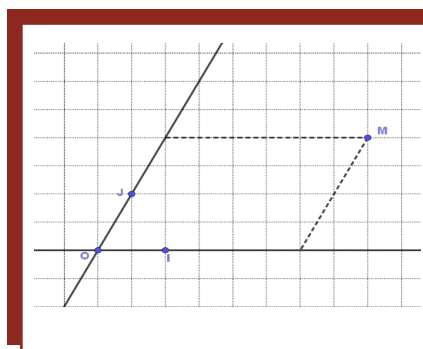
Définition 10

On considère un repère $(O; I, J)$ du plan et un point M .

- En traçant la parallèle à (OJ) passant par M , on obtient sur l'axe (OI) l'**abscisse** x_M du point M .
- En traçant la parallèle à (OI) passant par M , on obtient sur l'axe (OJ) l'**ordonnée** y_M du point M .
- Le couple de réels $(x_M; y_M)$ est appelé **coordonnées** du point M dans le repère $(O; I, J)$.

Exemple

Sur la figure ci-dessous, le point M a pour coordonnées $(3; 2)$ dans le repère $(O; I, J)$.



III. Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété 10

On considère dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$ les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Le **milieu du segment** $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Exemple

Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, soit les points $A(1; 2)$ et $B(3; 6)$.

Calculons les coordonnées du milieu K du segment $[AB]$.

On a $x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ et $y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 6}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

Ainsi, le milieu K du segment $[AB]$ a pour coordonnées $(2; 4)$.

IV. Distance entre deux points dans un repère orthonormé

Propriété 11

On considère dans le plan muni d'un **repère orthonormé** $(O; I, J)$ les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. La **distance** entre les points A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Remarques

- Il faut impérativement que le repère soit orthonormé pour pouvoir utiliser cette propriété.
- D'après la propriété, on a :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, soit les points $A(1; 2)$ et $B(3; 6)$.

Calculons la distance entre ces deux points.

On a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

Propriété 12

Soit A , B et C trois points distincts du plan. **Les points A , B et C sont alignés** dans cet ordre si et seulement si $AC = AB + BC$.

Exemple

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, on donne les points $A(-2; -2)$, $B(3; 1)$ et $C(8; 4)$.

On a $AB = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

$$AC = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (8 - (-2))^2} = \sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136} = \sqrt{4} \times \sqrt{34} = 2\sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4 - 1)^2 + (8 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}.$$

Comme $AC = AB + BC$, les points A , B et C sont alignés dans cet ordre.