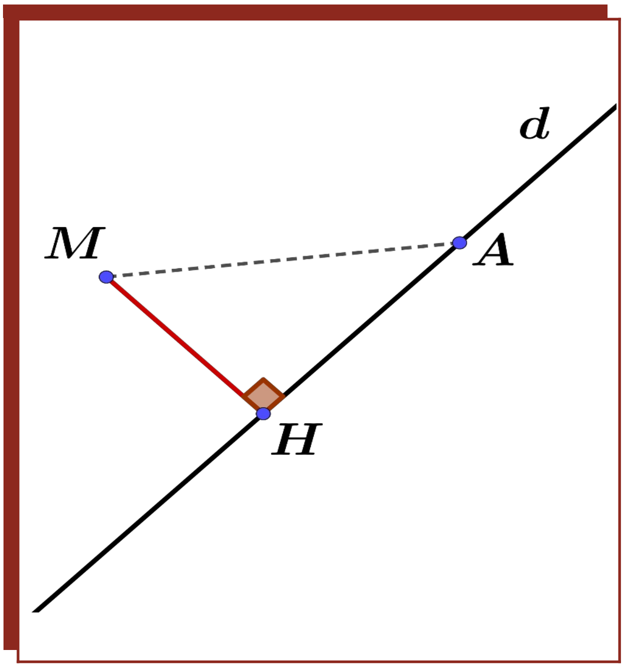
Chapitre 5

Repérage dans le plan

I. Projection orthogonale

Définition 1

Soit d une droite du plan et M un point n'appartenant pas à cette droite.
On appelle **projeté orthogonal** de M sur la droite d l'unique point H tel que $(\mathrm{MH}) \perp d$.



Remarque

Si le point M appartient à la droite d alors il est son propre projeté orthogonal.

Définition 2

On appelle **distance d'un point M à une droite d** la longueur HM où H est le projeté orthogonal de M sur la droite d.

Propriété 3

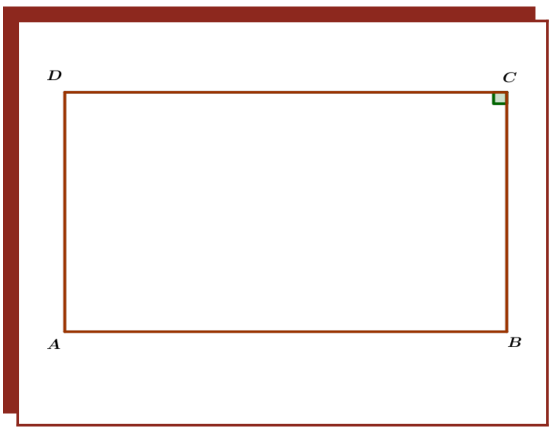
La distance d'un point M à une droite d est la plus **courte distance** entre le point M et un point de la droite.

Démonstration **(exigible)**

Soit A un point quelconque de la droite d distinct de H. Le triangle MAH est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore on a $\mathrm{MA}^2 = \mathrm{MH}^2 + \mathrm{AH}^2$.
Par conséquent, comme $\mathrm{M} \neq \mathrm{H}$, $\mathrm{MA}^2 > \mathrm{MH}^2$. On en déduit que quel soit le point A de la droite d, $\mathrm{MA} > \mathrm{MH}$, ce qui montre que la plus courte distance est bien MH.

Exemple

ABCD est un rectangle de longueur $\mathrm{AB} = 7$ et de largeur $\mathrm{BC} = 3$. Le projeté orthogonal du point D sur la droite (BC) est le point C donc la distance du point D à la droite (BC) vaut $\mathrm{DC} = \mathrm{AB} = 7$.

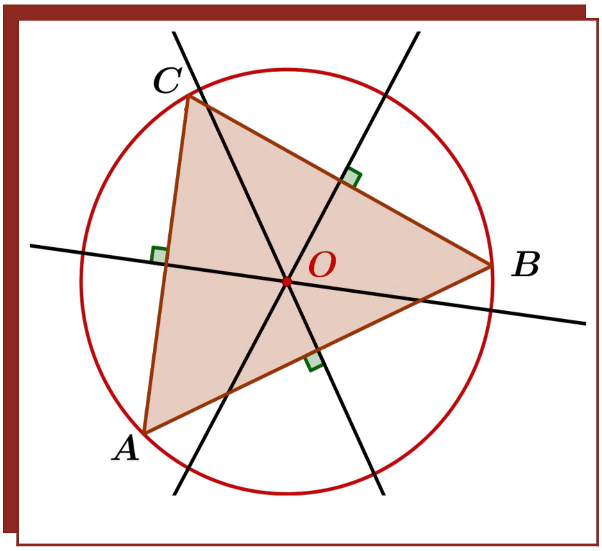


II. Droites remarquables du triangle et trigonométrie

II.1 Médiatrice

Définition 4

Une **médiatrice** d'un triangle est **une droite perpendiculaire à un côté et passant par son milieu**.



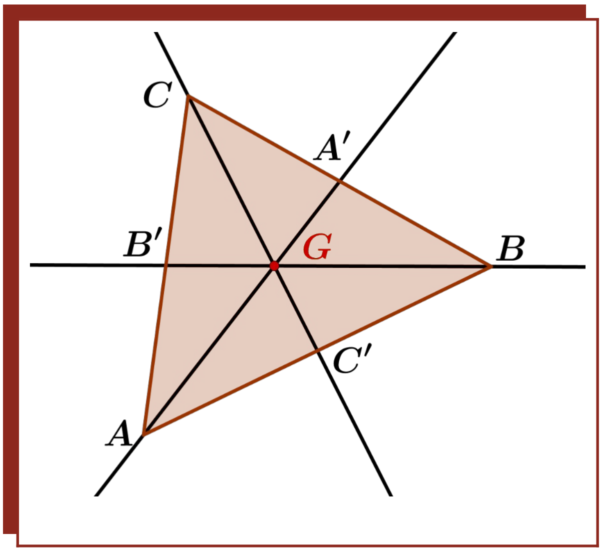
Propriété 5

Les trois médiatrices d'un triangle sont **concourantes en un point équidistant de chacun des sommets** du triangle.
On a $OA=OB=OC$.
Ce point est appelé **centre du cercle circonscrit** au triangle.

II.2 Médiane

Définition 6

Une **médiane** d'un triangle est **une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé**.

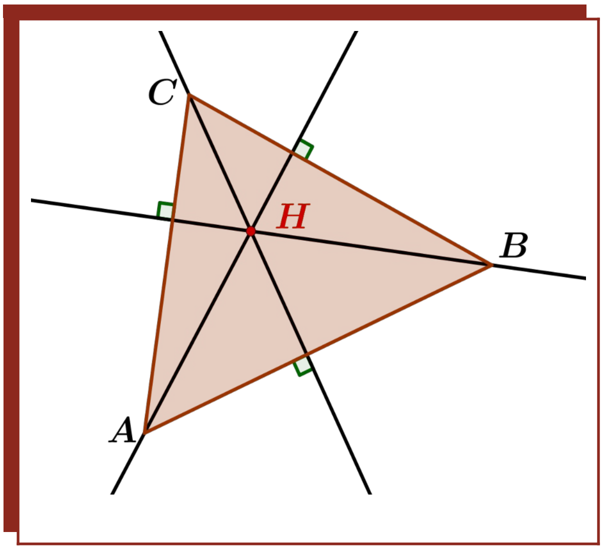


Propriété 7

Les trois médianes d'un triangle sont **concourantes** en un point G appelé **centre de gravité** du triangle.
Ce point G est situé au deux tiers de chaque médiane en partant du sommet :

$AG=\frac{2}{3}AA'$, $BG=\frac{2}{3}BB'$ et $CG=\frac{2}{3}CC'$

II.3 Hauteur



Définition 8

Une **hauteur** d'un triangle est **une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé**.

Propriété 9

Les trois hauteurs d'un triangle sont **concourantes** en un point appelé **orthocentre** du triangle. Il est noté H.

II.4 Trigonométrie

Définition 10

Soit ABC un triangle rectangle en A. On définit alors le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$ de la façon suivante :

- $\cos(\widehat{ABC})=\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}=\dfrac{AB}{BC}$
- $\sin(\widehat{ABC})=\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}=\dfrac{AC}{BC}$
- $\tan(\widehat{ABC})=\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}=\dfrac{AC}{AB}$

Exemple

Soit le triangle ABC rectangle en A tel que $AB=4$, $AC=3$ et $BC=5$.

On a $\cos(\widehat{ABC})=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{4}{5}=0,8$, $\sin(\widehat{ABC})=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{3}{5}=0,6$ et $\tan(\widehat{ABC})=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{4}=0,75$.

Remarque

On peut déterminer la mesure d'un angle grâce aux relations de trigonométrie.
Dans l'exemple précédent, en utilisant le « arccos » (ou le $\cos^{-1}$ dans la calculatrice) à la valeur $\dfrac{4}{5}$, on trouve l'angle $\widehat{ABC}$. On a $\widehat{ABC}\approx 37°$.

On peut faire de même en utilisant le « arcsin » (ou le $\sin^{-1}$) à la valeur $\dfrac{3}{5}$ ou encore le « arctan » (ou le $\tan^{-1}$) à la valeur $\dfrac{3}{4}$.

Propriété 11

Si α est la mesure d'un angle aigu dans un triangle rectangle, alors $\cos(\alpha)^2+\sin(\alpha)^2=1$.

Démonstration (exigible)

Soit un triangle ABC rectangle en A. On a :

$$\cos(\widehat{ABC})^2+\sin(\widehat{ABC})^2=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2+\left(\frac{AC}{BC}\right)^2=\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}.$$

Or $AB^2+AC^2=BC^2$ d'après le théorème de Pythagore.

D'où $\cos(\widehat{ABC})^2+\sin(\widehat{ABC})^2=\frac{BC^2}{BC^2}=1$.

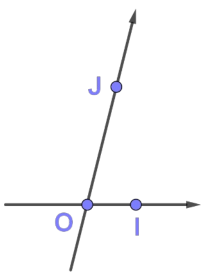
III. Coordonnées dans le plan

Définition 12

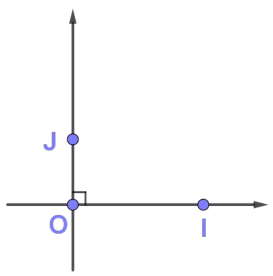
Définir un **repère du plan** consiste à choisir trois points non alignés dans un ordre précis : O, I et J. On note ce repère $(O;I,J)$ et :
Le point O est l'**origine** du repère.
La droite (OI) est l'**axe des abscisses** et le point I donne l'unité sur cet axe.
La droite (OJ) est l'**axe des ordonnées** et le point J donne l'unité sur cet axe.

Définition 13

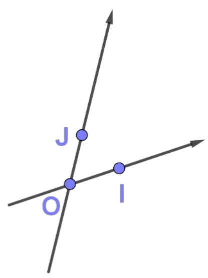
Si le triangle OIJ n'a aucune propriété particulière, le repère $(O;I,J)$ est dit **quelconque**.
Si le triangle OIJ est rectangle en O, le repère $(O;I,J)$ est dit **orthogonal**. Les axes du repère sont alors perpendiculaires.
Si le triangle OIJ est isocèle en O, le repère $(O;I,J)$ est dit **normé**. L'unité est la même sur les deux axes.
Si le triangle OIJ est rectangle isocèle en O, le repère $(O;I,J)$ est dit **orthonormé**. Les axes du repère sont alors perpendiculaires et l'unité est la même sur les deux axes.



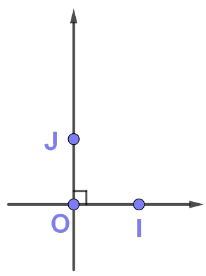
Repère quelconque



Repère orthogonal



Repère normé



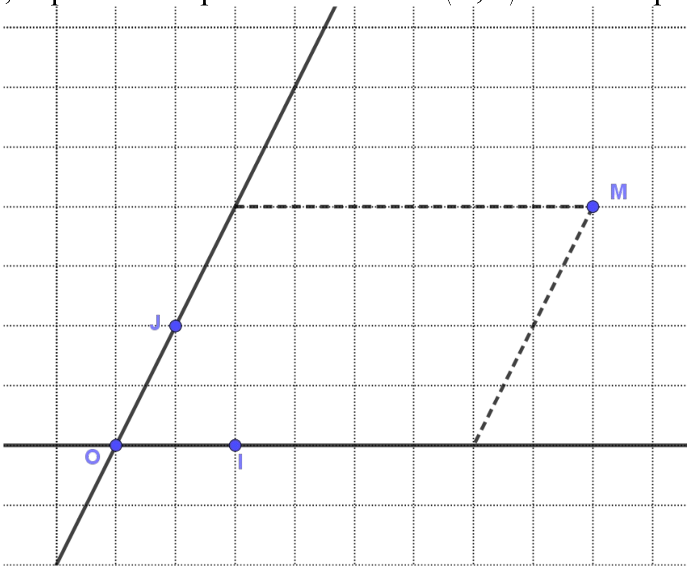
Repère orthonormé

Définition 14

On considère un repère $(O;I,J)$ du plan et un point M.
• En traçant la parallèle à (OJ) passant par M, on obtient sur l'axe (OI) l'**abscisse** x_M du point M.
• En traçant la parallèle à (OI) passant par M, on obtient sur l'axe (OJ) l'**ordonnée** y_M du point M.
• Le couple de réels $(x_M;y_M)$ est appelé **coordonnées** du point M dans le repère $(O;I,J)$.

Exemple

Sur la figure ci-dessous, le point M a pour coordonnées $(3;2)$ dans le repère $(O;I,J)$.



IV. Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété 15

On considère dans le plan muni d'un repère $(O;I,J)$ les points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

Le **milieu du segment** $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Exemple

Dans le plan muni d'un repère $(O;I,J)$, soit les points $A(1;2)$ et $B(3;6)$.
Calculons les coordonnées du milieu K du segment $[AB]$.

On a $x_K=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$ et $y_K=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+6}{2}=\frac{8}{2}=4$.

Ainsi, le milieu K du segment $[AB]$ a pour coordonnées $(2;4)$.

V. Distance entre deux points dans un repère orthonormé

Propriété 16

On considère dans le plan muni d'un **repère orthonormé** $(O;I,J)$ les points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$. La **distance** entre les points A et B est :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Remarques

- Il faut impérativement que le repère soit orthonormé pour pouvoir utiliser cette propriété.
- D'après la propriété, on a :

$$AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$$

Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I,J)$, soit les points $A(1;2)$ et $B(3;6)$.
Calculons la distance entre ces deux points.
On a $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=\sqrt{4}\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

Propriété 17

Soit A, B et C trois points distincts du plan. **Les points A, B et C sont alignés** dans cet ordre si et seulement si $AC=AB+BC$.

Exemple

Dans un repère orthonormé $(O;I,J)$, on donne les points $A(-2;-2)$, $B(3;1)$ et $C(8;4)$.
On a $AB=\sqrt{(1-(-2))^2+(3-(-2))^2}=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$

$AC=\sqrt{(4-(-2))^2+(8-(-2))^2}=\sqrt{6^2+10^2}=\sqrt{136}=\sqrt{4}\times\sqrt{34}=2\sqrt{34}$

$BC=\sqrt{(4-1)^2+(8-3)^2}=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$.

Comme $AC=AB+BC$, les points A, B et C sont alignés dans cet ordre.