

Chapitre 5

Dérivation

I. Nombre dérivé

f est une fonction définie sur un intervalle I , a et $a+h$ sont deux réels de l'intervalle I , avec $h \neq 0$.

I.1 Taux d'accroissement

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant les réels a et b . Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le réel défini par le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2$. Son taux de variation entre 0 et 2 est :

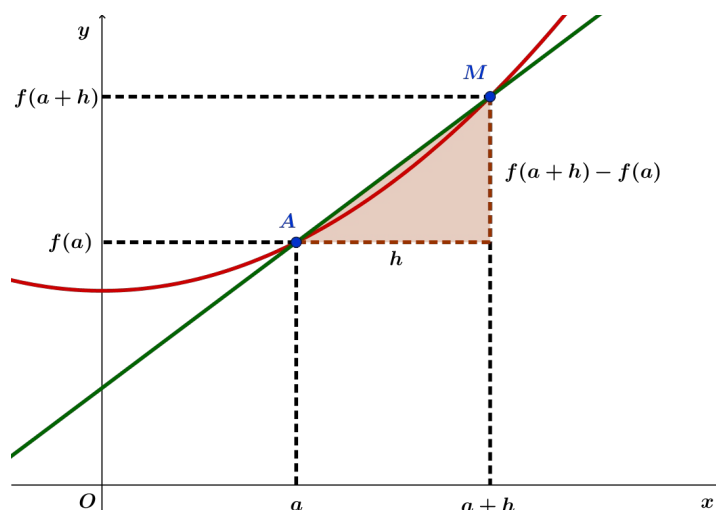
$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{2^2-2-(0^2-2)}{2} = \frac{4-2-0+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Définition 2

Le **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$ est $\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Remarques

- $\tau(0)$ n'existe pas, mais on va s'intéresser aux valeurs de t lorsque h se rapproche de plus en plus de 0.
- Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est le **coefficient directeur** de la droite (AM) avec $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$. On appelle cette droite une sécante à la courbe.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Soit le point $A(1;1)$ et h un réel.

On pose $M(1+h; f(1+h))$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est le taux d'accroissement $\tau(h)$ et il vaut :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h$$

I.2 Nombre dérivé**Définition 3**

Si, lorsque h se rapproche le plus possible de 0, $\tau(h)$ semble valoir une valeur réelle, on dit que f est dérivable en a . Cette valeur réelle est appelée **nombre dérivé** de f en a , et est notée $f'(a)$. On écrit alors : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h)$, soit $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Remarques

- Ce dernier terme se lit « limite quand h tend vers 0 de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ». On utilise ici la notion de limite, qui est présentée plus en détails en Terminale.
- Il est possible qu'une fonction ne soit pas dérivable en un point.

Exemple

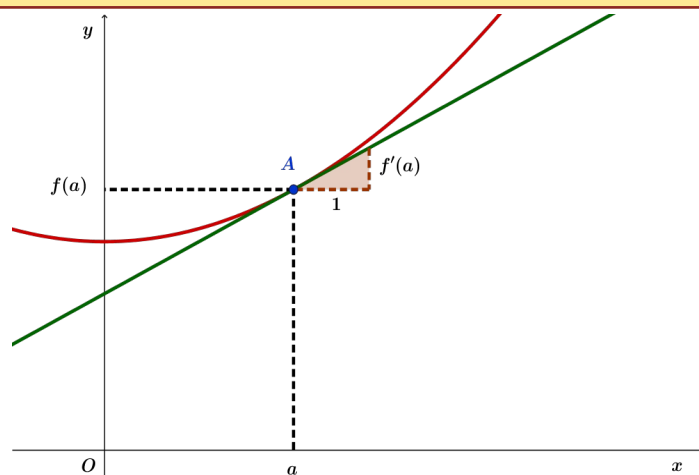
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Calculer le nombre dérivé en 2.

$$\text{On a } \tau(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = \frac{h(4+h)}{h} = 4 + h.$$

D'où $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (4+h) = 4$. Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 4$.

Définition 4

On constate que, lorsque h tend vers 0, les sécantes en A tendent vers une droite particulière, nommée **tangente** à C_f en A : aux alentours du point $A(a, f(a))$, elle est semblable à la courbe.



Définition 5

Lorsque f est dérivable en a , on appelle **tangente** à la courbe C_f au point d'abscisse a la droite T passant par $A(a; f(a))$ dont le **coefficient directeur est le nombre dérivé $f'(a)$** .

Propriété 6

Soit f une fonction dérivable en a . L'équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse a est : $T: y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Démonstration (exigible)

La tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a)$.

Elle a donc pour équation $y = f'(a)x + p$, $p \in \mathbb{R}$.

Comme le point $A(a; f(a))$ appartient à la tangente T , ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite.

On a alors $y_A = f'(a)x_A + p \Leftrightarrow f(a) = f'(a)a + p \Leftrightarrow p = f(a) - f'(a) \times a$.

En remplaçant p dans l'équation de la tangente et en factorisant par $f'(a)$, on obtient alors :

$$T: y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Exemple

Soit la fonction carrée $f(x) = x^2$. Le nombre dérivé de f en 2 est 4 (exemple précédent).

On sait alors que la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 2 a pour équation :

$$T: y = f'(2) \times (x-2) + f(2)$$

Or $f(2) = 2^2 = 4$ et $f'(2) = 4$.

Donc $T: y = 4(x-2) + 4 = 4x - 8 + 4 = 4x - 4$

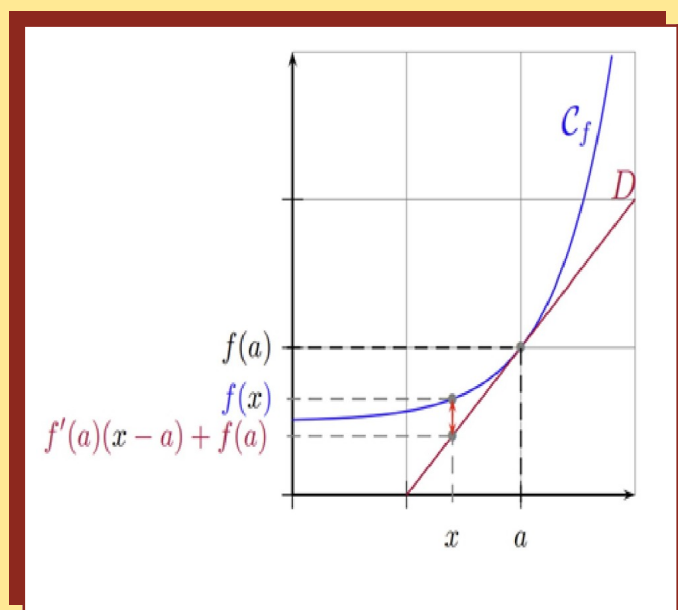
I.3 Approximation linéaire**Définition 7**

Soit f une fonction dérivable en a .

On appelle fonction **affine tangente de f en a** la fonction $x \rightarrow f'(a)(x-a) + f(a)$.

Pour tout x proche de a , on a :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$



Remarques

• Il s'agit de l'**approximation affine (ou linéaire)** de f en a ou l'**approximation polynomiale à l'ordre 1** de f en a .

• Si f est deux fois dérivable, alors pour tout $x \in I$ proche de a , on a :

$$f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a)$$

Il s'agit de l'**approximation polynomiale à l'ordre 2** de f en a , où f'' est la dérivée seconde de f (soit la dérivée de la fonction f').

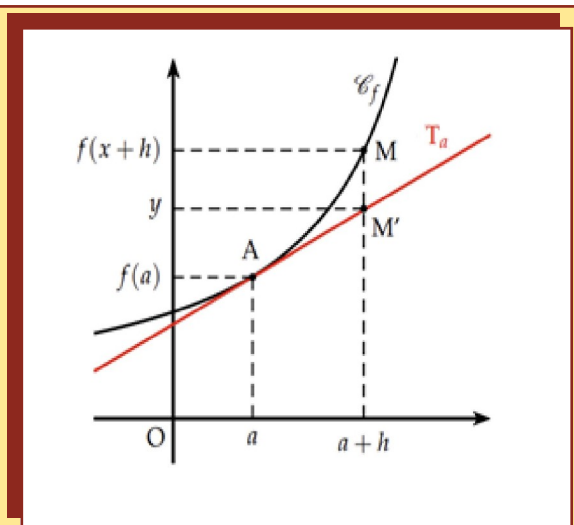
Définition 8

Soit f une fonction dérivable en a .

On pose $x = a + h$ avec h proche de 0.

Si on confond le point M avec le point M' , on a $y \approx f(a+h)$. Alors $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.

$f(a) + f'(a)h$ est donc une **approximation linéaire** de $f(a+h)$.

**Exemple**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

$$\text{On } \tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2+h.$$

D'où $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$. Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

Pour h proche de 0, on a alors $f(1+h) \approx f(1) + f'(1)h = 1 + 2h$. Or $f(1+h) = (1+h)^2$.

Autrement dit, pour h proche de 0, on a $(1+h)^2 = 1 + 2h$.

Remarque

On a $(1+h)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times h + h^2 = 1 + 2h + h^2$. D'après l'approximation linéaire, on en déduit donc que $1 + 2h + h^2 \approx 1 + 2h$ lorsque h est proche de 0.

II. Fonction dérivée**Définition 9**

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I .

On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à chaque x associe $f'(x)$.

Remarques

Toutes les fonctions usuelles vues en première sont dérivables sur leur domaine de définition, à l'exception des fonctions racine carrée et valeur absolue en 0.

- La tangente à la courbe représentative de la fonction racine carrée au point de coordonnées $(0; 0)$ est verticale (c'est l'axe des ordonnées), d'équation $x=0$. Elle n'a donc pas de coefficient directeur. $f'(0)$ n'existe pas. La fonction racine carrée n'est donc dérivable que sur $]0; +\infty[$.
- La fonction valeur absolue n'est également pas dérivable en 0 : en effet, elle n'admet pas de tangente en ce point, du fait de l'angle droit qu'elle y fait. Ainsi, une courbe n'admet pas toujours une tangente en chacun de ses points.

III. Dérivées des fonctions usuelles**Propriété 10**

Les **fonctions constantes** de la forme $f(x)=k$ où $k \in \mathbb{R}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ont pour dérivée $f'(x)=0$.

Démonstration

Soit a et h deux réels et tel que $h \neq 0$.

Le taux d'accroissement de f en a est $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{k - k}{h} = \frac{0}{h} = 0$.

D'où $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$.

Quel que soit le nombre a , f est dérivable en a et $f'(a)=0$.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=0$.

Propriété 11

Les **fonctions affines** de la forme $f(x)=mx+p$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ont pour dérivée $f'(x)=m$.

Démonstration

Soit a et h deux réels et tel que $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en a est :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{m(a+h) + p - (ma + p)}{h} = \frac{ma + mh + p - ma - p}{h} = \frac{mh}{h} = m$$

D'où $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} m = m$.

Quel que soit le nombre a , f est dérivable en a et $f'(a)=m$.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=m$.

Remarque

La dérivée d'une fonction affine est donc une fonction constante.

Propriété 12

La **fonction carrée** $f(x)=x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $f'(x)=2x$.

Démonstration (exigible)

Soit a et h deux réels et tel que $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en a est :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = \frac{h(2a + h)}{h} = 2a + h$$

D'où $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h = 2a$.

Quel que soit le nombre a , f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

Propriété 13

La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et a pour dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration (exigible)

Soit a et h deux réels tels que $a > 0$ et $a+h > 0$. Le taux d'accroissement de f en a est :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a - (a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = -\frac{h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$$

D'où $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$.

Quel que soit le nombre $a > 0$, f est dérivable en a et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

On en déduit que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

On obtient le même résultat pour $a < 0$.

La fonction dérivée est définie sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ par $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Propriété 14

La fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et a pour dérivée $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Démonstration (exigible)

Seule la non dérivabilité en zéro est exigible.

• Soit a et h deux réels tels que $a > 0$ et $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en a est :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$$

D'où $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Quel que soit le nombre $a > 0$, f est dérivable en a et $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

On en déduit que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

- Soit h un réel tel que $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en 0 est :

$$\tau(h) = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h} \times \sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Or, lorsque h tend vers 0, le quotient $\frac{1}{\sqrt{h}}$ devient de plus en plus grand. ($\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$)

Donc le taux d'accroissement ne tend pas vers un nombre réel fini lorsque h tend vers 0.
Ainsi, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Propriété 15

Soit n un entier naturel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$.
Alors sa dérivée est $f'(x) = nx^{n-1}$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$.

Propriété 16

Soit n un entier naturel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^n}$.
Alors sa dérivée est $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Exemple

Soit la fonction f définie $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^3}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = -\frac{3}{x^{3+1}} = -\frac{3}{x^4}$.

IV. Premières opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 17

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .
La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.

Démonstration

Soit a et h deux réels de I tels que $h \neq 0$ et $a+h \in I$.

Le taux d'accroissement de $u+v$ en a est :

$$\tau(h) = \frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

$$\text{Or } \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = u'(a) + v'(a).$$

Quel que soit le nombre a , $u+v$ est dérivable en a et $(u+v)'(a) = u'(a) + v'(a)$.

On en déduit que pour tout $x \in I$, $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} + x^2$. f est de la forme $u+v$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^2$. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x$.

Propriété 18

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et λ un nombre réel.

La fonction λu est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda u'$.

Démonstration

Soit a et h deux réels de I tels que $h \neq 0$ et $a+h \in I$. Le taux d'accroissement de λu en a est :

$$\tau(h) = \frac{(\lambda u)(a+h) - \lambda u(a)}{h} = \frac{\lambda \times u(a+h) - \lambda \times u(a)}{h} = \lambda \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

$$\text{Or } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a).$$

$$\text{D'où } \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \lambda \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = \lambda \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = \lambda u'(a).$$

Quel que soit le nombre a , λu est dérivable en a et $(\lambda u)'(a) = \lambda u'(a)$.

On en déduit que pour tout $x \in I$, $(\lambda u)'(x) = \lambda u'(x)$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $3x^4$. f est de la forme λu avec $\lambda=3$ et $u(x) = x^4$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3 \times 4x^3 = 12x^3$.

Propriété 19

Soit f une **fonction polynomiale** de la forme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ définie sur $\mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \neq 0$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x - 1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 4 \times 4x^3 + 3 \times 5x^2 - 2 \times 7x + 2 = 16x^3 + 15x^2 - 14x + 2$.