

Phénomènes aléatoires

I. Généralités

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble Ω (ou E) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.
- Un **événement** A est une partie de l'univers Ω (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de Ω).
- Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.
- L'**événement contraire** de A , noté $\bar{A}$, est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A .

- $P(\emptyset)=0$ et $P(\Omega)=1$.
- La probabilité d'un événement A , notée $P(A)$, est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A** .
- Pour tout événement A , on a $0 \leq P(A) \leq 1$.
- La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.
- La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est : $P(\bar{A})=1-P(A)$.

Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie**.

- L'événement « **A et B** », noté $A \cap B$, s'appelle l'**intersection** des événements A et B . Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
- L'événement « **A ou B** », noté $A \cup B$, s'appelle la **réunion** des événements A et B . Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.
- Deux événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Soit A un événement d'un univers Ω . Pour une loi équirépartie, on a :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si A et B sont **incompatibles**, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

II. Probabilités conditionnelles

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A) \neq 0$.

La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est

réalisé est notée $P_A(B)$, et elle est définie par : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

La probabilité $P_A(B)$ vérifie bien $0 \leq P_A(B) \leq 1$ et $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors :

$$P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Utilisation de tableaux

Les tableaux à double entrées permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

- $P(A \cap B)$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la colonne B .
- $P(A)$ (respectivement $P(B)$) se lit sur la dernière colonne (respectivement la dernière ligne).
- $P_A(B)$ (ou $P_B(A)$) s'obtient en calculant le quotient des deux probabilités adéquates :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple

Un club sportif rassemble 180 membres répartis en juniors et seniors. On compte 135 seniors dont 81 hommes. Il y a 27 garçons parmi les seniors.

En choisissant une femme au hasard, calculer la probabilité d'avoir une junior.

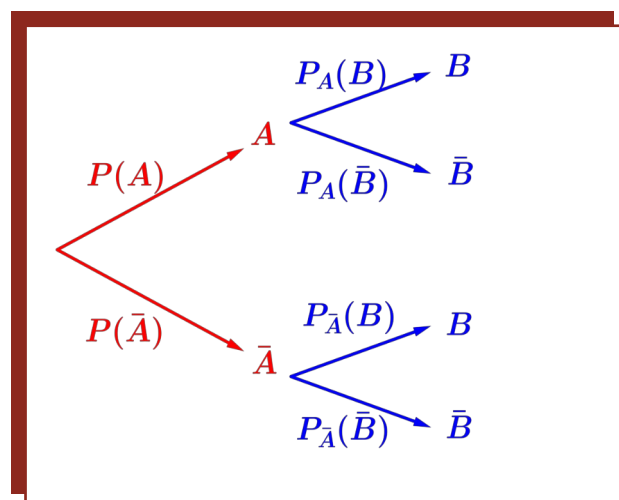
	J	S	Total
H	$\frac{27}{180} = 0,15$	$\frac{81}{180} = 0,45$	$0,15 + 0,45 = 0,6$
F	0,1	0,3	0,4
Total	0,25	$\frac{135}{180} = 0,75$	1

Ainsi $P_F(J) = \frac{P(F \cap J)}{P(F)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$.

III. Arbre pondéré et calculs de probabilité

- La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.
- La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins (**formule des probabilités totales**).

Le cas le plus fréquent correspond à la partition la plus simple (A et $\bar{A}$). Si on connaît les probabilités de B et $\bar{B}$ par l'intermédiaire de A et $\bar{A}$, on a l'arbre suivant :



- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$$

- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E .

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) \end{aligned}$$

Exemple

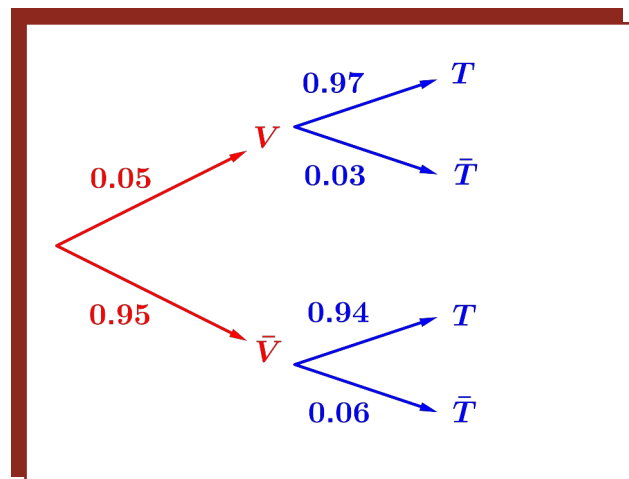
Dans un pays, il y a 5% de la population contaminée par le coronavirus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,97 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,94 (spécificité du test). On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note les événements suivants :

V : « la personne est contaminée par le virus »

T : « le test est positif »



- La probabilité que le test soit positif est :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(V \cap T) + P(\bar{V} \cap T) \\ &= 0,05 \times 0,97 + 0,95 \times 0,94 \\ &= 0,9415 \end{aligned}$$

- La probabilité que la personne soit contaminée sachant que le test est positif est :

$$\begin{aligned} P_T(V) &= \frac{P(V \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0,05 \times 0,97}{0,9415} \\ &= 0,051514 \end{aligned}$$

IV. Indépendance

- Soit A et B deux événements d'un univers Ω .
On dit que A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Soit A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$.
Les événements A et B sont **indépendants** si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soit indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une **succession de deux épreuves indépendantes**.

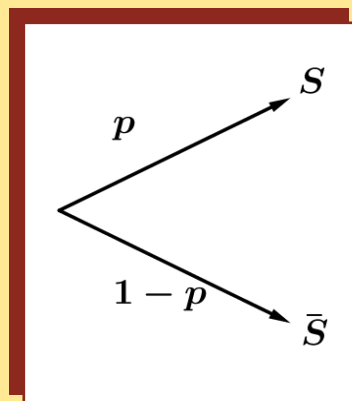
- Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.
- Deux expériences sont dites **identiques** si elles ont les mêmes issues et les mêmes probabilités pour chaque issue.

Dans une succession d'épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue est le **produit des probabilités rencontrées sur le chemin** qui conduit à cette issue.

V. Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p (compris entre 0 et 1) est une expérience aléatoire comportant deux issues :

- l'une appelée **succès**, noté S , de probabilité p .
- l'autre appelée **échec**, noté $\bar{S}$ ou E , de probabilité $q = 1 - p$.



Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1.

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est une expérience aléatoire consistant à répéter n fois, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli de paramètre p .