

Dérivation et convexité

I. Rappels sur la dérivation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un nombre réel de I . Soit h un nombre réel non nul suffisamment petit.

On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un réel quand h tend vers 0, qu'on note $f'(a)$ et qu'on appelle nombre dérivé de la fonction f en a . On écrit alors : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h)$, soit $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Soit f une fonction dérivable en a . L'équation réduite de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse a est : $T: y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I .

On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à chaque x associe $f'(x)$.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$ si et seulement si f est croissante sur I .
- Pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$ si et seulement si f est décroissante sur I .
- Pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$ si et seulement si f est constante sur I .
- Si f' est strictement positive (respectivement strictement négative) sur I , sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I .

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

- Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe en a , alors la fonction f admet un extremum local en a .

II. Compléments sur la dérivation

II.1 Fonction composée

Soit u une fonction définie sur un intervalle I à valeur dans un intervalle J et v une fonction définie sur un intervalle J .

La composée de u par v , notée $v \circ u$, est la fonction définie sur I par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} v \circ u : & I & \rightarrow & J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \xrightarrow{u} & u(x) & \xrightarrow{v} & v(u(x)) \end{array}$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I par $g(x)=ax+b$, où a et b sont des réels tels que $g(x)\in J$ pour tout $x\in I$.
Alors la fonction $f\circ g$ est dérivable sur I , et on a pour tout réel $x\in I$, $(f\circ g)'(x)=a f'(ax+b)$.

II.2 Dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On note f' sa fonction dérivée.
La fonction f est **deux fois dérivable** sur I si f' est elle-même dérivable sur I .
On note f'' la dérivée de f' . Elle est appelée **dérivée seconde** de f .

III. Tableaux des dérivées

DÉRIVÉES DES FONCTIONS USUELLES

Fonction	D_f	Fonction dérivée	$D_{f'}$
$f(x)=k$, $k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=mx+p$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=m$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=x^n$, $n\geq 1$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$, $n\geq 1$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=e^x$	$\mathbb{R}$

OPÉRATIONS SUR LES DÉRIVÉES

Fonction	Fonction dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}, v(x) \neq 0$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}, v(x) \neq 0$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}, u(x) \geq 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u^n, n \geq 1$	$nu' u^{n-1}$
$\frac{1}{u^n}, n \geq 1 \text{ et } u(x) \neq 0$	$-n \frac{u'}{u^{n+1}}$
e^u	$u' e^u$
$f(ax+b), ax+b \in J \text{ pour tout } x \in I$	$af'(ax+b)$

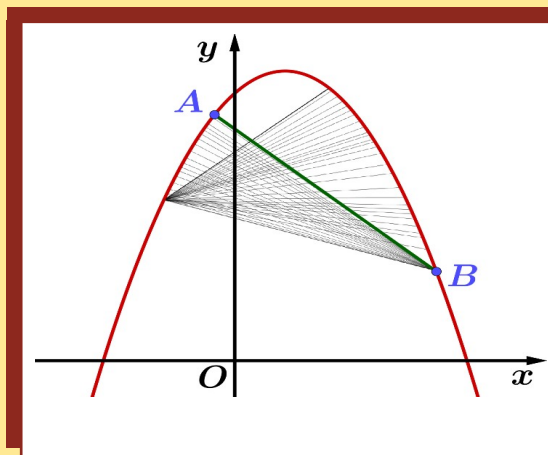
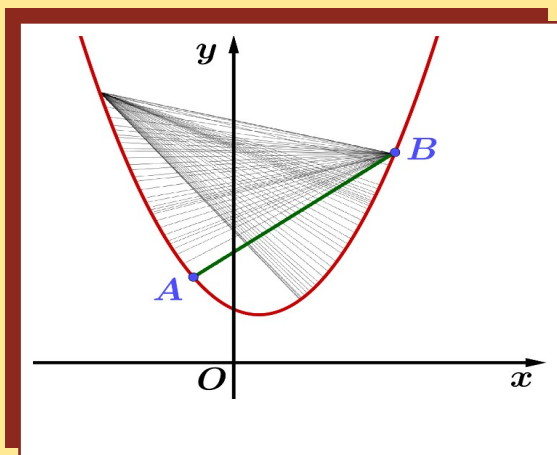
IV. Convexité

IV.1 Fonctions convexes et concaves

Soit f une fonction, C_f sa courbe représentative dans un repère et A et B deux points de C_f . Alors la droite (AB) est appelée **sécante** de C_f .

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative dans un repère.

- f est **convexe** sur I si, pour tout $x \in I$, C_f est **en dessous de ses sécantes**.
- f est **concave** sur I si, pour tout $x \in I$, C_f est **au-dessus de ses sécantes**.



- Les fonctions carrée et exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est concave sur $[0; +\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $] -\infty; 0[$ et convexe sur $] 0; +\infty[$.
- La fonction cube est concave sur $] -\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si f est une fonction convexe sur I , alors $-f$ est concave sur I .
- Si f est une fonction concave sur I , alors $-f$ est convexe sur I .

IV.2 Convexité des fonctions dérivables

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **convexe** sur I si et seulement si f' est **croissante** sur I .
- La fonction f est **concave** sur I si et seulement si f' est **décroissante** sur I .

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **convexe** sur I si et seulement si f'' est **positive** sur I .
- La fonction f est **concave** sur I si et seulement si f'' est **négative** sur I .

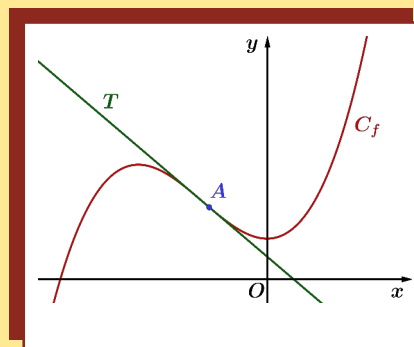
Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I .

Si f'' est **positive** sur I , alors la courbe représentative de f est **au-dessus de chacune de ses tangentes**.

IV.3 Point d'inflexion

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Un **point d'inflexion** est un point où la représentation graphique de f traverse sa tangente. Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet un point d'inflexion, alors la fonction change de convexité.



Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

f' change de sens de variations sur I en a si et seulement si sa courbe $C_{f'}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a . Ce point a pour coordonnées $(a; f'(a))$.

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

La courbe représentative de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a . Ce point a pour coordonnées $(a; f(a))$.