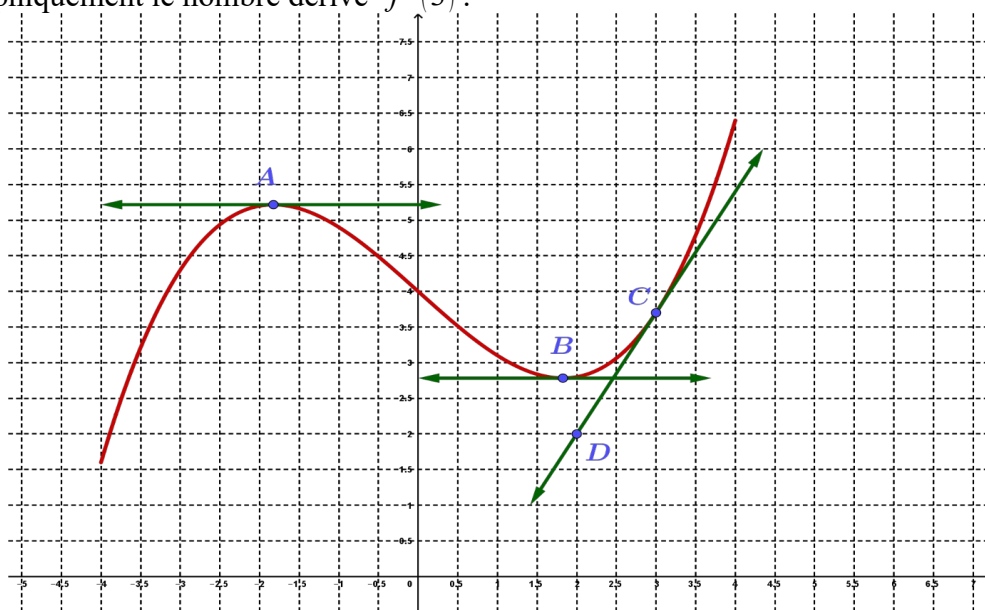


Dérivation et convexité

Exercice 1

On a tracé ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f et ses tangentes en $A(-1,83; 5,22)$, $B(1,83; 2,78)$ et $C(3; 3,7)$.

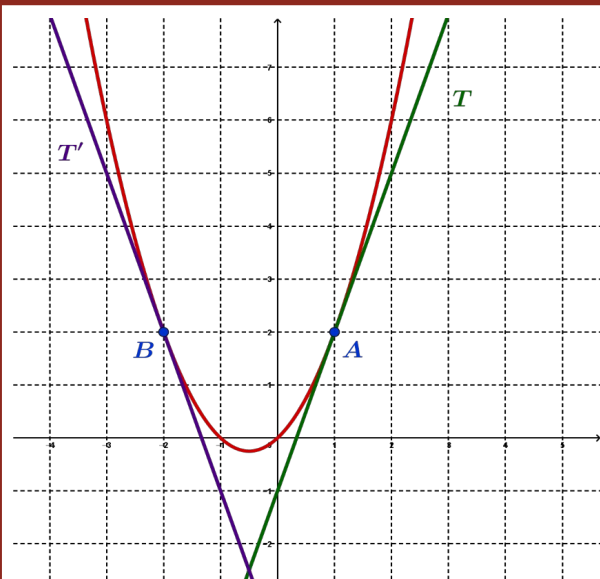
1. Lire graphiquement les nombres dérivés $f'(-1,83)$ et $f'(1,83)$.
2. Lire graphiquement le nombre dérivé $f'(3)$.



Exercice 2

On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + x$. On donne le point $A(1; 2)$ par lequel passe la tangente T .

1. Déterminer graphiquement le nombre dérivé en 1 puis vérifier ce résultat par le calcul.
2. Déterminer alors une équation de la tangente T .
3. Déterminer graphiquement le nombre dérivé en -2 puis vérifier ce résultat par le calcul.
4. Déterminer alors une équation de la tangente T' .
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre T et T' .

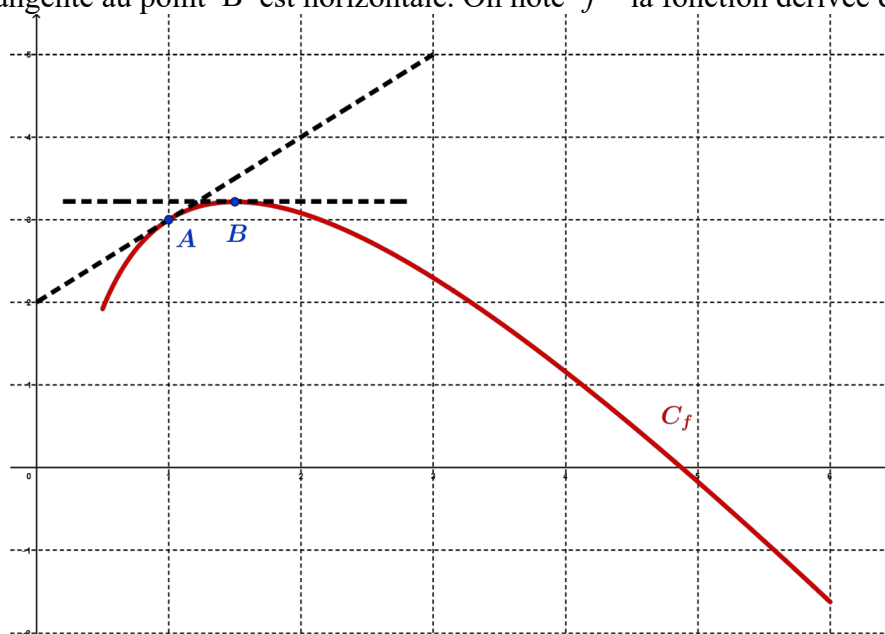


Exercice 3

1. Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(4) = -1$ et $f'(4) = 2$. Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 4.
2. Soit une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(-3) = 7$ et $g'(-3) = -4$. Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_g au point d'abscisse -3 .

Exercice 4

La courbe C_f ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0, 5; 6]$. Les points $A(1; 3)$ et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe C_f . Les tangentes à la courbe C_f aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale. On note f' la fonction dérivée de f .



1. Que vaut $f(1, 5)$? Et $f(1)$? (On arrondira les résultats si besoin).
2. Déterminer $f'(1, 5)$.
3. En déduire l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 1,5.
4. La tangente à la courbe C_f passant par A passe par le point de coordonnées $(0; 2)$. Déterminer une équation de cette tangente.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point A d'abscisse 1.
2. Tracer la courbe C_f et la tangente T .
3. Existe-t-il une tangente à C_f parallèle à la droite d d'équation $y = 3x - 4$? Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact.

Exercice 6

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f , sa dérivée f' et l'ensemble de dérivabilité de f .

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|--|
| 1. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$; | 2. $f(x) = \frac{-4}{x}$; | 3. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$; |
| 4. $f(x) = \frac{x^2}{4} + 2x + 5$; | 5. $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + 4$; | 6. $f(x) = x^3 - x$; |
| 7. $f(x) = -3\sqrt{x}$; | 8. $f(x) = -x^3 + \sqrt{2}x^2 + 4x$; | 9. $f(x) = \frac{1}{x} + x^3$; |
| 10. $f(x) = x^5 - 2x^3 + 9x^2 + 4$; | 11. $f(x) = \frac{4x-1}{3}$; | 12. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$. |

Exercice 7

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f , sa dérivée f' et l'ensemble de dérivabilité de f .

1. $f(x) = \frac{1}{x-3}$;

2. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$;

3. $f(x) = \frac{2}{x+4}$;

4. $f(x) = \frac{-5}{x^2+1}$;

5. $f(x) = \frac{3}{2x^3-6x+4}$;

6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 8

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f , sa dérivée f' et l'ensemble de dérivabilité de f .

1. $f(x) = 4x(x+5)$;

2. $f(x) = x^2(2x+4)$;

3. $f(x) = x\sqrt{x}$;

4. $f(x) = x^3(x-\sqrt{x})$;

5. $f(x) = (x^2+4)(x^7-4x+3)$;

6. $f(x) = (2x+7)^2$;

7. $f(x) = (x+1)(x-2)(x^2-6)$;

8. $f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-1)$;

9. $f(x) = \frac{4}{3}x^3(1+x)$;

10. $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$;

11. $f(x) = \frac{2x^2}{x+3}$;

12. $f(x) = \frac{3x^4-2}{x^2+7}$;

13. $f(x) = \frac{2x^2+5x+1}{x^2+1}$;

14. $f(x) = \frac{2\sqrt{x+3}}{x}$;

15. $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$;

16. $f(x) = \frac{2x-7}{x^2}$;

17. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3}$;

18. $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$.

Exercice 9

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f , sa dérivée f' et l'ensemble de dérivabilité de f .

1. $f(x) = 2x^2-5x+2$;

2. $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$;

3. $f(x) = (2-x)\sqrt{x}$;

4. $f(x) = x^3\sqrt{x}$;

5. $f(x) = (2x+1)^2$;

6. $f(x) = x^2(x+3)$;

7. $f(x) = \frac{1}{x^2}$;

8. $f(x) = \frac{x^4}{4} - 3x^2 + \frac{x}{5} + 3$;

9. $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$;

10. $f(x) = 2 - \frac{x}{x+6}$;

11. $f(x) = -\frac{3}{2x+3}$;

12. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3}$.

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, déterminer $v \circ u$ puis $u \circ v$ en précisant l'ensemble de définition.

1. $u : x \rightarrow 5x+3$ et $v : x \rightarrow \sqrt{x}$;

2. $u : x \rightarrow x^2+x$ et $v : x \rightarrow e^x$;

3. $u : x \rightarrow x^3-1$ et $v : x \rightarrow \frac{1}{x}$;

4. $u : x \rightarrow \sqrt{x}$ et $v : x \rightarrow e^x$.

Exercice 11

1. Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

Calculer $g \circ f(1)$ et $f \circ g(3)$.

2. Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^2$.

Calculer $g \circ f(-2)$ et $f \circ g(-1)$.

Exercice 12

Décomposer chacune des fonctions f suivantes sous la forme $v \circ u$, où u et v sont deux fonctions de référence, après avoir déterminé l'ensemble de définition de f .

1. $f : x \rightarrow \sqrt{2x-6}$;
2. $f : x \rightarrow \frac{1}{x-7}$;
3. $f : x \rightarrow e^{3x-5}$;
4. $f : x \rightarrow 3e^x - 5$;
5. $f : x \rightarrow e^{\frac{x}{2}}$;
6. $f : x \rightarrow |x^2 - 1|$;

Exercice 13

Dans chacun des cas suivants, déterminer $u \circ u$ en précisant l'ensemble de définition.

1. $u : x \rightarrow x^2$;
2. $u : x \rightarrow \frac{1}{x}$;
3. $u : x \rightarrow 3x - 2$;

Exercice 14

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f , sa dérivée f' et l'ensemble de dérivabilité de f .

1. $f(x) = \sqrt{3x-1}$;
2. $f(x) = (-9x+1)^2$;
3. $f(x) = \sqrt{10-x}$;
4. $f(x) = -\frac{3}{x+1}$;
5. $f(x) = \frac{1}{(2x+7)^2}$;
6. $f(x) = 2\left(3x - \frac{2}{5}\right)^7$;
7. $f(x) = e^{-x+2}$;
8. $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$;
9. $f(x) = \cos(4x)$;

Exercice 15

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f , sa dérivée f' et l'ensemble de dérivabilité de f .

1. $f(x) = \sqrt{1-3x}$;
2. $f(x) = (3x-1)^{17}$;
3. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$;
4. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$;
5. $f(x) = -x + \sqrt{(1+3x)^3}$;
6. $f(x) = (1+\sqrt{x})^3$;
7. $f(x) = \left(\frac{1+x}{2x-4}\right)^2$;
8. $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4$;
9. $f(x) = \frac{1}{(x^2+3)^5}$;
10. $f(x) = \frac{5}{(2x-8\sqrt{x})^7}$;
11. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;
12. $f(x) = \sqrt{x^2-x+3}$;
13. $f(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{1-8x}}$;
14. $f(x) = -\frac{2}{(x^3+x^2+x)^3}$;
15. $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$;
16. $f(x) = \sqrt{1-e^x}$;
17. $f(x) = (3e^x+4)^7$;
18. $f(x) = e^{2\sqrt{x}+1}$;

Exercice 16

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition, la dérivée et l'ensemble de dérivabilité de la fonction f . Vous donnerez ensuite ses variations.

1. $f(x) = x^3 + 3x$;
2. $f(x) = x^3 + 3x^2$;
3. $f(x) = x^3 - 3x$;
4. $f(x) = x^3 - 3x^2$;
5. $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x$;
6. $f(x) = x^4 - 8x^2$;
7. $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$;
8. $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$;
9. $f(x) = \frac{2-3x}{x+2}$;
10. $f(x) = \frac{5x+3}{2x-1}$;
11. $f(x) = \frac{x^2+5x+5}{x^2+x+1}$;
12. $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x^2+1}$;

Exercice 17

Dans chacun des cas, donner les variations de la fonction f .

1. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$;
2. $f(x) = \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^2$;
3. $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$;
4. $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$;
5. $f(x) = x + 2 + \frac{1}{2x+4}$;
6. $f(x) = -\frac{2}{3x+4}$;
7. $f(x) = (x^2-1)\sqrt{x}$;
8. $f(x) = \sqrt{x^2-2x+3}$;
9. $f(x) = 2\sqrt{x+3}$;
10. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \frac{1}{x}}$;
11. $f(x) = \left(\frac{2x-1}{x^2} \right)^3$;
12. $f(x) = \frac{1}{(1-2x)^3}$.

Exercice 18

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f , sa dérivée f' et l'ensemble de dérivabilité de f .

1. $f(x) = e^x$;
2. $f(x) = -3e^x$;
3. $f(x) = x + e^x$;
4. $f(x) = (0,4x-2)e^x$;
5. $f(x) = (x+1)^2 e^x$;
6. $f(x) = \frac{2e^x-1}{e^x+3}$;
7. $f(x) = 2x-1 + \frac{e^x}{e^x+1}$;
8. $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$;
9. $f(x) = x^2 e^x$;
10. $f(x) = e^x - 3x - 1$;
11. $f(x) = xe^x - 1$;
12. $f(x) = \frac{e^x-2}{e^x+2}$.

Exercice 19

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f , sa dérivée f' et l'ensemble de dérivabilité de f .

1. $f(x) = e^{3x} - 3e^x$;
2. $f(x) = (0,4x-2)e^{-0,1x}$;
3. $f(x) = e^{-x^3}$;
4. $f(x) = e^{\frac{2x+1}{x+4}}$;
5. $f(x) = xe^{-x^2}$;
6. $f(x) = \frac{3}{1+e^{-2x}}$;
7. $f(x) = x+1-3xe^{-x^2}$;
8. $f(x) = \frac{3e^x}{e^x-2}$;
9. $f(x) = x + (1-x)e^{2x}$.

Exercice 20

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

1. Calculer la dérivée de f et donner les variations de f .
2. La fonction f possède-t-elle des extrema locaux ? Des extrema (globaux) ?

Exercice 21

Une balle est propulsée verticalement à partir du sol. Elle est animée d'un mouvement rectiligne dont la loi horaire est donnée approximativement par $d(t) = -4,9t^2 + bt$ (b réel donné) jusqu'à ce quelle retombe sur le sol (t en s et $d(t)$ en m).

1. Au bout de $1,5s$ après son lancement, la balle atteint sa hauteur maximale et sa vitesse instantanée est nulle. Puis elle redescend. Calculer b .
2. Calculer la vitesse initiale de la balle (c'est-à-dire à l'instant $t=0$).
3. Combien de temps dure la descente ?

Exercice 22

Un stade olympique a la forme d'un rectangle avec deux demi-cercles aux extrémités. La longueur de la piste intérieure est imposée et mesure 400 m . On note L et l les dimensions du rectangle.

1. Montrer que $L = 200 - \frac{\pi}{2} l$.

2. Quelles dimensions doit-on donner au stade pour que sa surface soit maximale ?

Exercice 23

Dans chacun des cas suivants, la fonction f est deux fois dérivable. Déterminer sa dérivée seconde en précisant l'ensemble de définition de f'' .

1. $f(x) = e^x$;

2. $f(x) = 3x^2 - 7x$;

3. $f(x) = \frac{1}{x}$;

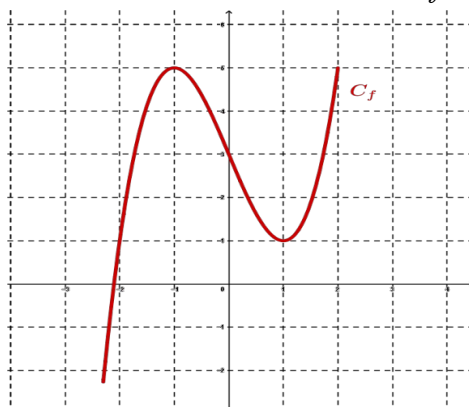
4. $f(x) = e^{3x^2+2}$;

5. $f(x) = x^3 + xe^x$;

6. $f(x) = e^{x^3-5}$.

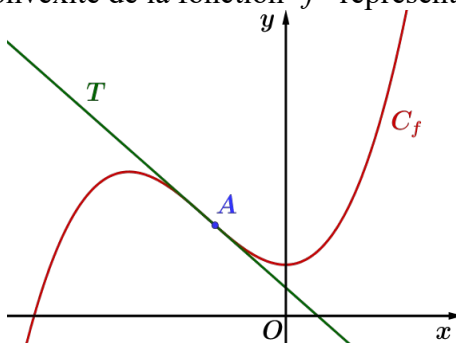
Exercice 24

D'après le graphique, conjecturer la convexité de la fonction f .



Exercice 25

Déterminer graphiquement la convexité de la fonction f représentée ci-dessous.



Exercice 26

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que f est dérivable et on donne le tableau de variations de f' ci-dessous. Étudier sa convexité sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	6	$+\infty$
Variations de f'	$-\infty$	-2	$-\infty$

Exercice 27

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que f est dérivable et on donne le tableau de variations de f' ci-dessous. Étudier sa convexité sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
Variations de f'	$+\infty$	-1	3	$-\infty$

Exercice 28

On assimile le rythme de croissance d'une production à la dérivée de la fonction f définie par :

$$f'(x) = -8x^3 + 240x^2 - 2400x + 8000$$

où x est le nombre d'objets produit par heure.

1. Déterminer la dérivée de la fonction f .
2. Sur quel intervalle f' est-elle croissante ? Décroissante ?
3. En déduire la convexité de la fonction f .

Exercice 29

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x^2$.

Calculer la dérivée seconde de f et en déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Exercice 30

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 3x^3 - 6x^2 - x - 5$.

1. Déterminer la dérivée seconde de f et étudier son signe.
2. En déduire les variations de la dérivée de f .
3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 31

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{3-x}{x+1}$.

Calculer la dérivée seconde de f et en déduire la convexité de f .

Exercice 32

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Le tableau de signes de f'' est donné ci-dessous.

x	$-\infty$	-4	4	$+\infty$	
signe de $f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

En déduire la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 33

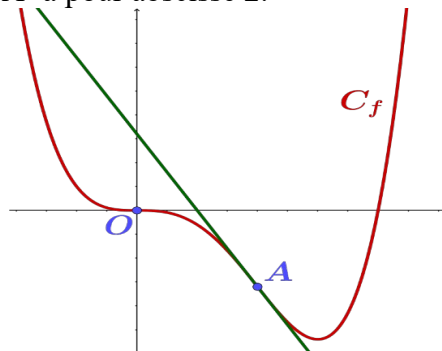
Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3x - 3x\sqrt{x}$.

On admet que f est deux fois dérivable et on note f'' sa dérivée seconde.

1. Calculer $f''(x)$.
2. Étudier le signe de $f''(x)$.
3. En déduire que f est concave.
4. Interpréter graphiquement le résultat de la question précédente.

Exercice 34

Étudier la convexité de la fonction f représentée ci-dessous et déterminer les éventuels points d'inflexion sachant que le point A a pour abscisse 2.

**Exercice 35**

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{10}$. Étudier la convexité de la fonction f en précisant les éventuels points d'inflexion.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - x^2 + x + 1$. Étudier la convexité de la fonction g en précisant les éventuels points d'inflexion.

Exercice 36

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 e^x$.

1. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations complet sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Sa courbe admet-elle des points d'inflexion ?

Exercice 37

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 7x + 8)e^{-x}$.

1. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations complet sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Sa courbe admet-elle des points d'inflexion ?

Exercice 38

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 4\sqrt{x} + 3x$.

Étudier le signe de $f''(x)$. La courbe C_f admet-elle des points d'inflexion ?

Exercice 39

Soit f la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$.

1. Donner la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
3. En déduire que, pour tout réel x , $e^x > x$.

Exercice 40

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Donner la convexité de f sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
3. En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$, $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Problèmes**Problème 1** ...*Rendements marginaux...*

Une entreprise fabrique des calculatrices.

Le coût de production de x centaines de calculatrices en milliers d'euros est donné par la fonction

$$C \text{ définie sur } [0;5] \text{ par } C(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + \frac{15}{2}x + 9.$$

1. Étudier les variations de la fonction C sur $[0;5]$.
2. Déterminer la dérivée seconde de C sur $[0;5]$.
3. On dit que les rendements marginaux décroissent lorsque la fonction C devient convexe. À partir de quelle quantité de production les rendements marginaux diminuent-ils ? Le résultat sera arrondi à l'unité.

Problème 2 ...*Étude classique...*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3-x)e^x + 1$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\mathbb{R}$, $f'(x) = (2-x)e^x$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
3. a. Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.

Montrer que T a pour équation $y = -e^3x + 3e^3 + 1$.

- b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses.

Problème 3 ...*Fonction composée...*

On considère la fonction f définie et deux fois dérivable par $f(x) = \sqrt{x^3 + 8}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur son domaine de définition.
4. Calculer $f''(x)$. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f .

Problème 4 ...*Dérivée n-ième...*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
2. On appelle dérivée troisième de f , notée $f^{(3)}$, la fonction dérivée de f'' . Déterminer, pour tout réel x , $f^{(3)}(x)$.
3. Soit n un entier naturel. On appelle dérivée n -ième de f , notée $f^{(n)}$, la fonction obtenue lorsqu'on dérive n fois successivement la fonction f .
 - a. Conjecturer une expression de $f^{(n)}(x)$ pour tout réel x .
 - b. Démontrer votre conjecture.

Problème 5 ...*Des inconnues...*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, avec a, b, c, d et e des réels tels que $a \neq 0$.

Existe-t-il des réels a, b, c, d et e tels que la courbe représentative de f admette un point d'inflexion ?

Problème 6 ...Fonction de satisfaction...

On appelle fonction « satisfaction » toute fonction dérivable qui prend des valeurs comprises entre 0 et 100. Lorsque la fonction « satisfaction » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « saturation ».

On définit aussi la fonction « envie » comme la fonction dérivée de la fonction « satisfaction ».

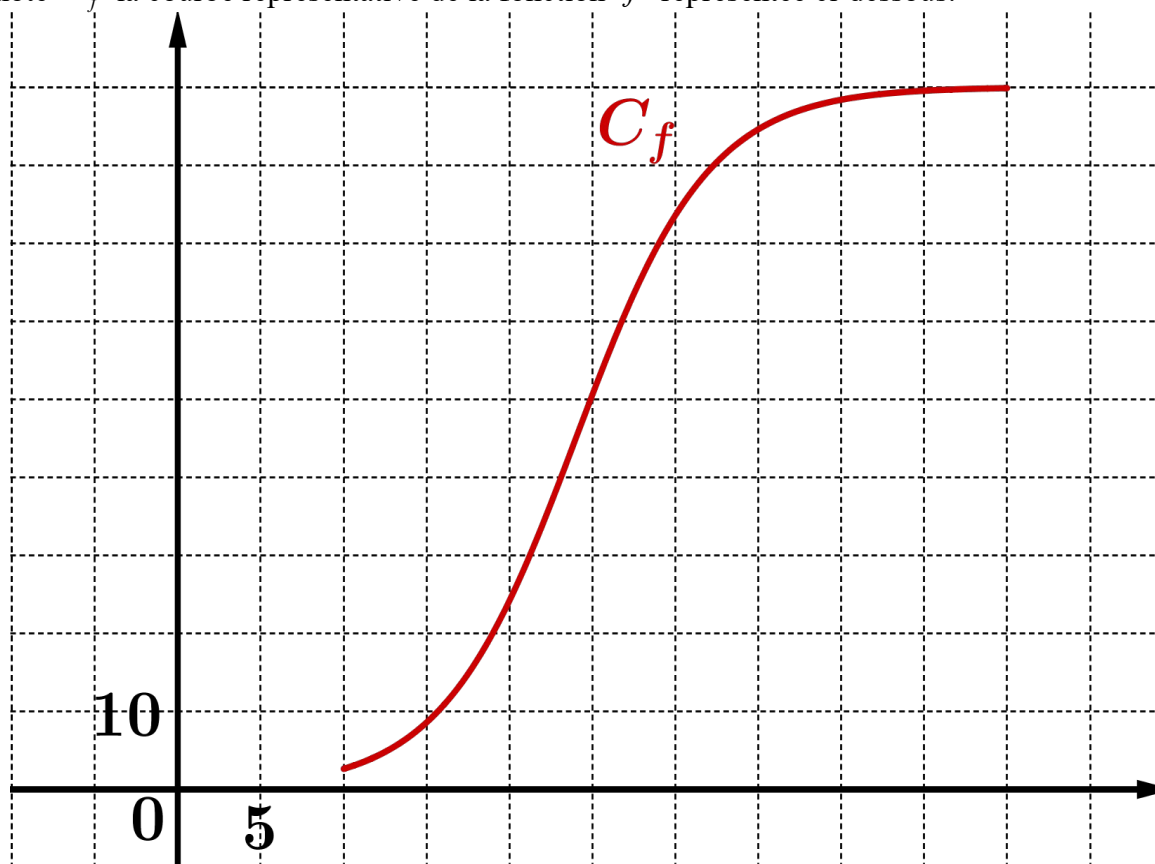
La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit.

On admet que la fonction « satisfaction » f est définie sur l'intervalle $[10; 50]$ par :

$$f(x) = \frac{90}{1 + e^{-0,25x+6}}$$

où x est exprimé en millier d'euros.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f représentée ci-dessous.



1. Par lecture graphique, conjecturer la convexité de la fonction f ainsi que le sens de variation de la fonction « envie ». En donner une interprétation concrète.
2. D'après ce modèle, serait-il possible d'atteindre la saturation ? Justifier.
3. Vérifier que, pour tout $x \in [10; 50]$, $f''(x) = \frac{5,625 e^{-0,25x+6} (e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}$.
4. En déduire la convexité de la fonction f sur $[10; 50]$.
5. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « envie » décroît ? Justifier.

Problème 7 ...Position relative...

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2-1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. a. Déterminer la dérivée de la fonction f .
b. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
2. a. Déterminer la dérivée seconde de la fonction f .
b. En déduire la convexité de la fonction f .
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - f(x)$.
a. Démontrer que pour tout réel x , $g(x) = x(1 - e^{x^2-1})$.
b. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $1 - e^{x^2-1} \geq 0$.
c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[-1; 1]$ et en déduire la position relative de la courbe C_f et de la droite d d'équation $y = x$ sur $[-1; 1]$.

Problème 8 ...Preuves...

On suppose connu le résultat suivant : pour tout réel x , $e^x > x$.

1. Soit ϕ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $\phi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $\phi(x) \geq 1$.

2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

3. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{2x}}$.

- a. Étudier la limite de f en $+\infty$.
- b. Étudier les variations de la fonction f , puis dresser son tableau de variations sur $]0; +\infty[$.

Problème 9 ...Étude à l'aide d'une fonction auxiliaire...

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer le signe de la fonction g sur $[0; +\infty[$.
3. En déduire que pour tout réel $x \in [0; +\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B

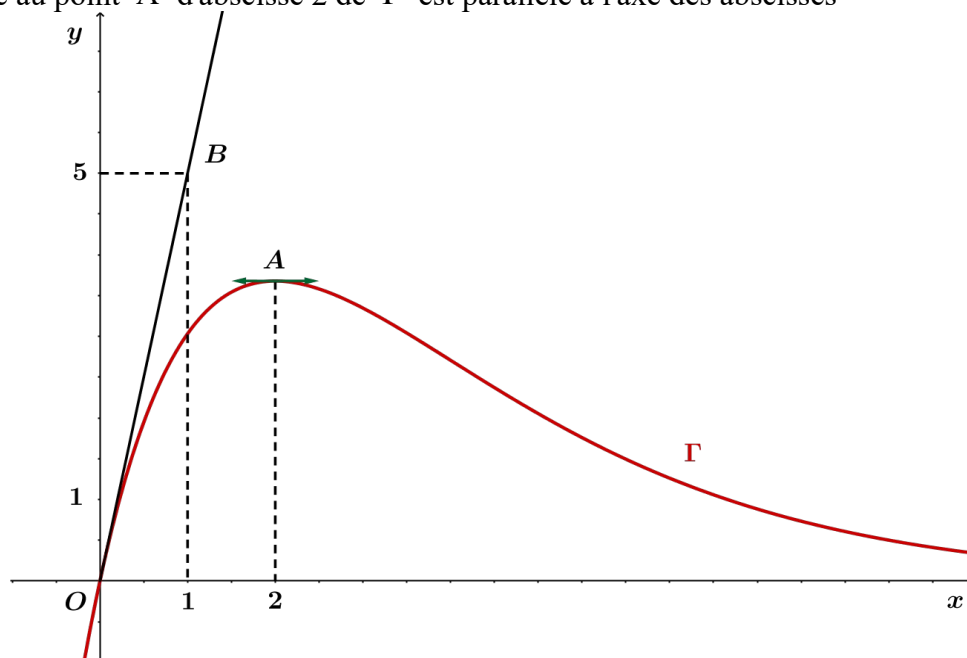
On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$. On admet que f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

1. Montrer que pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.
2. Soit D la droite d'équation $y = x$.
a. Montrer que pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.
b. Étudier la position relative de la droite D et de la courbe représentative de f sur $[0; 1]$.

Problème 10 ...Des inconnues...

Le graphique ci-dessous donne, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de Γ d'une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur cet intervalle. On précise que :

- l'origine O du repère appartient à Γ
- la droite d passant par O et par le point B de coordonnées $(1; 5)$ est tangente en O à Γ
- la tangente au point A d'abscisse 2 de Γ est parallèle à l'axe des abscisses



1. En utilisant le graphique et les renseignements donnés ci-dessus :

a. Préciser $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.

b. Préciser le sens de variations de f . Dresser son tableau de variations.

2. On suppose que la fonction f est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (ax + b)e^{cx}$, avec a , b et c des réels.

a. En utilisant $f(0)$, déterminer b .

b. Calculer $f'(x)$.

c. En utilisant $f'(0)$ et $f'(2)$, déterminer a et c .