

Chapitre 4

Généralités sur les fonctions

I. Définitions

Définition 1

Soit D un ensemble de nombres réels. Définir une fonction f sur l'ensemble D consiste à associer, à chaque réel x de D , un **unique nombre** réel y .

Définition 2

Soit une fonction f définie sur un ensemble D .

- D s'appelle l'**ensemble de définition** de la fonction f .
- y s'appelle l'**image** de x par la fonction f et se note $f(x)$.
- x est un **antécédent** de y par la fonction f .

Remarques

- D peut être l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, ou être constitué d'une ou plusieurs parties de $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in D$. L'**image** du nombre x par la fonction f est unique et se note $f(x)$. $f(x)$ se lit « f de x ».
- Si y est l'image de x par f , alors on a l'égalité $y = f(x)$ et x est un **antécédent** de y par la fonction f .
- Pour indiquer que f est une fonction de D dans $\mathbb{R}$, on peut également utiliser la notation suivante :

$$\begin{aligned} f &: D \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Attention!

f est une fonction alors que $f(x)$ est un nombre.

Remarques

- $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. On le note également $[0; +\infty[$.
- $\mathbb{R}^-$ désigne l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls. On le note également $] -\infty; 0]$.
- $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ désigne l'ensemble des réels non nuls. On le note aussi $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$.

II. Différentes façons de définir une fonction

Définition 3

Soit f une fonction, D son ensemble de définition et $x \in D$.

L'**expression algébrique** de la fonction f donne directement $f(x)$ en fonction de la variable x .

Exemple

La fonction f associe à un nombre réel x quelconque le nombre $f(x)=2x^2-3$.

- L'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$.
- On peut écrire, dans ce cas :

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^2-3 \end{aligned}$$

- Pour calculer, par exemple, l'image de -5 par la fonction f , on remplace x par -5 dans l'expression de $f(x)$. On a donc $f(-5)=2 \times (-5)^2-3=2 \times 25-3=50-3=47$.

Définition 4

Soit f une fonction, D son ensemble de définition et $x \in D$.

Un **tableau de valeurs** de la fonction f donne, sur la première ligne (ou colonne), différentes valeurs de la variable x et, en vis-à-vis sur la deuxième ligne (ou colonne), les images $f(x)$ qui leur sont associées.

Exemple

On considère le tableau de valeurs suivant :

Antécédent x	-4	-1	0	2	3
Image $f(x)$	5	4	1	2	4

- Le nombre 0 a pour image 1 par la fonction f .
- $f(-1)=4$ et $f(3)=4$. -1 et 3 sont des antécédents de 4 par la fonction f .

Définition 5

La **courbe représentative** de la fonction f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ (ou $(x; y)$) où x parcourt le domaine de définition D de la fonction f . Elle est souvent notée C_f .

L'équation de cette courbe représentative est $y=f(x)$.

Propriété 6

Un point M de coordonnées $(x; f(x))$ appartient à la courbe représentative C_f d'une fonction si et seulement si x appartient à D et $y=f(x)$.

Méthode algébrique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-5$.

- Déterminer une image

L'image de 7 par la fonction f est $f(7)=3 \times 7-5=21-5=16$.

- Déterminer un antécédent

L'antécédent de 4 par la fonction f est tel que $f(x)=4$.

On a $f(x)=4 \Leftrightarrow 3x-5=4 \Leftrightarrow 3x=9 \Leftrightarrow x=3$. Ainsi l'antécédent de 4 par la fonction f est 3.

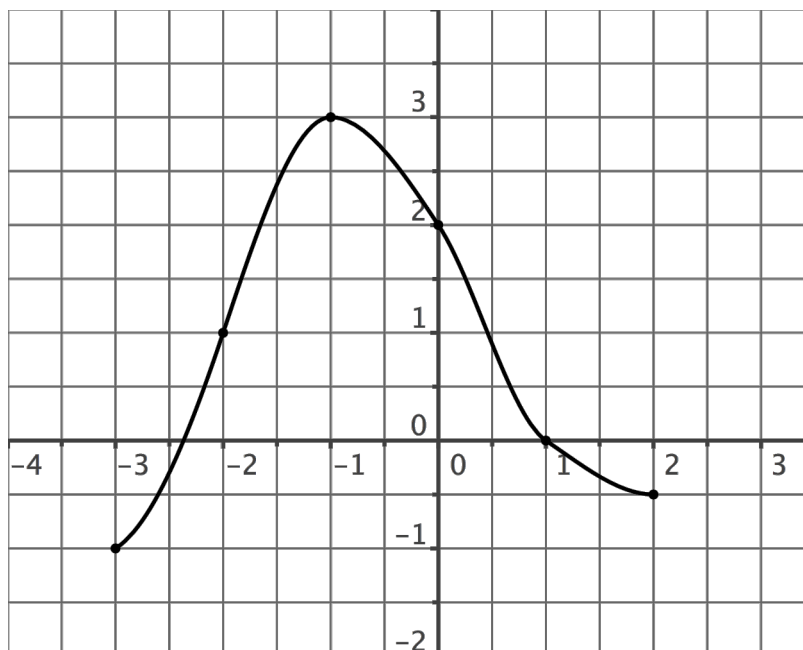
- Déterminer si un point appartient à une courbe

Le point $A(1; -2)$ appartient à la courbe C_f représentative de f si et seulement si $f(1)=-2$.

On a $f(1)=3 \times 1-5=3-5=-2$. Ainsi $A \in C_f$.

Exemple

On considère la courbe ci-dessous représentant une fonction f .



D'après cette courbe, on peut dire que :

- L'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle $[-3; 2]$.
- Le nombre -3 a pour image -1 par f ce qui s'écrit $f(-3) = -1$.
- Le nombre 1 a pour antécédents les nombres -2 et $0,5$.

III. Résolution graphique d'équation et d'inéquation

III.1 Résolution d'équation du type $f(x) = k$

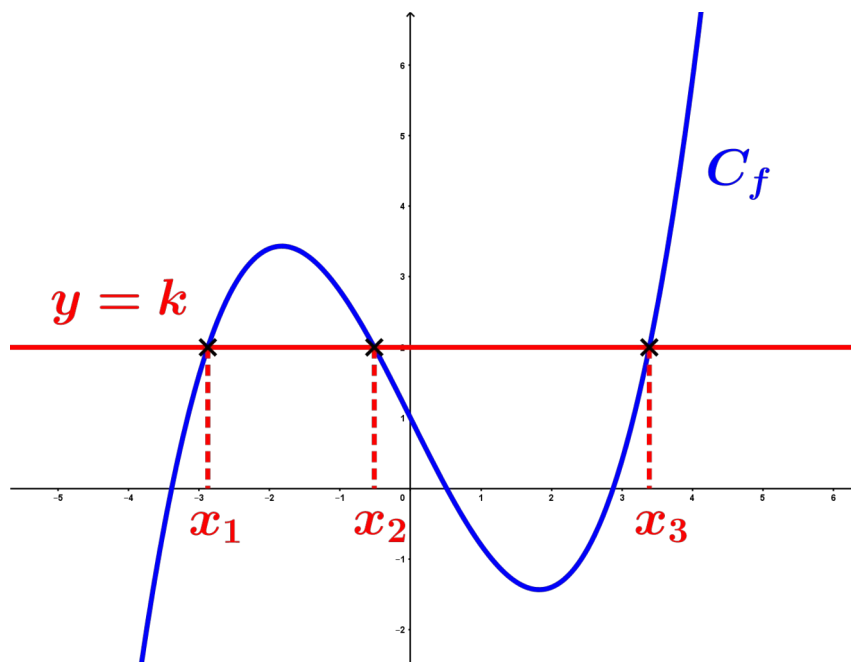
Définition 7

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et k un réel fixé.

Résoudre l'équation $f(x) = k$ consiste à trouver **tous les réels x de D qui ont pour image k par la fonction f** . Ceci revient à déterminer l'ensemble des antécédents de k par f .

Propriété 8

Graphiquement, les solutions de $f(x) = k$ sont les **abscisses de tous les points de C_f ayant pour ordonnées k** . On détermine en fait l'ensemble des abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite d'équation $y = k$.



III.2 Résolution d'équation du type $f(x) = g(x)$

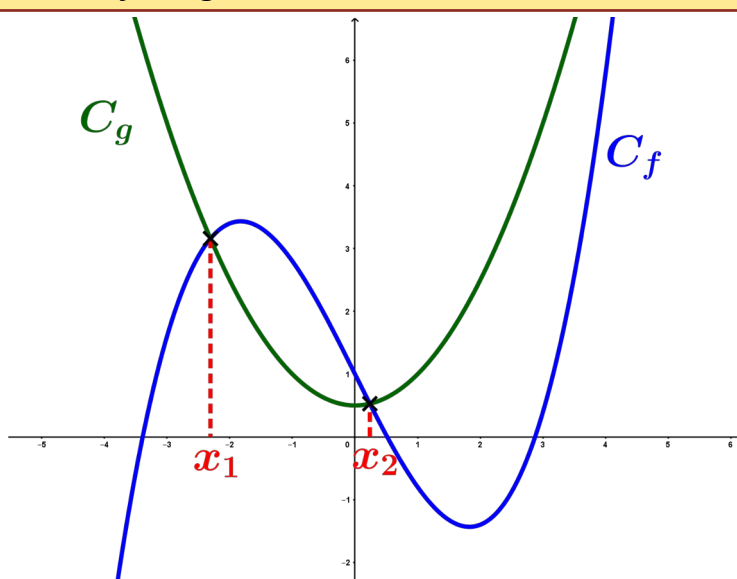
Définition 9

Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble D .

Résoudre $f(x) = g(x)$ consiste à déterminer **tous les réels x de D qui ont la même image par f et g** .

Propriété 10

Graphiquement, les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les **abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de f et g** .



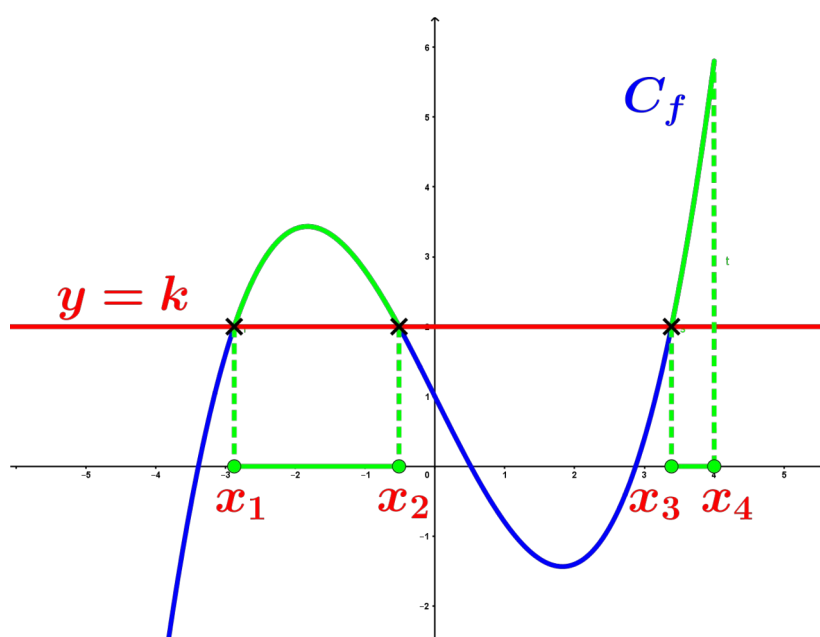
III.3 Résolution d'inéquation

Définition 11

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et k un réel fixé.
Résoudre l'équation $f(x) \geq k$ consiste à trouver tous les réels x de D qui ont une image supérieure ou égale à k par la fonction f .

Propriété 12

Graphiquement, les solutions de $f(x) \geq k$ sont les **abscisses de tous les points de C_f ayant une ordonnée supérieure ou égale à k** . On détermine en fait l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f situés au dessus de la droite d'équation $y = k$.

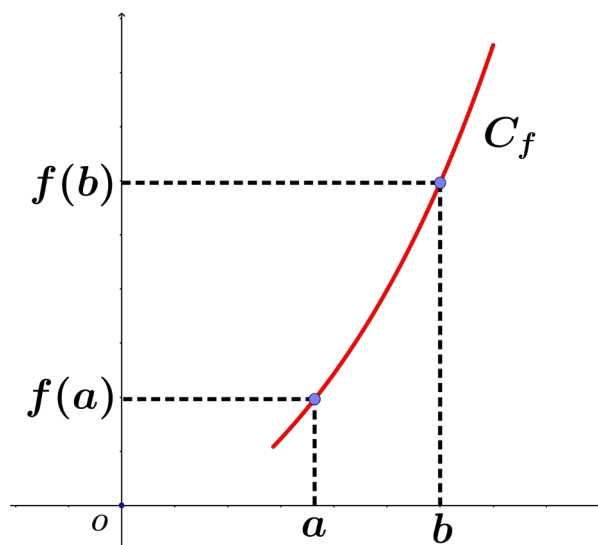


IV. Croissance et décroissance d'une fonction

On considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition 13

La fonction f est **croissante** sur l'intervalle I (respectivement **strictement croissante** sur I) lorsque, quels que soient les réels a et b de I : si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$ (respectivement si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$).

**Remarques**

Si f est croissante, on peut dire :

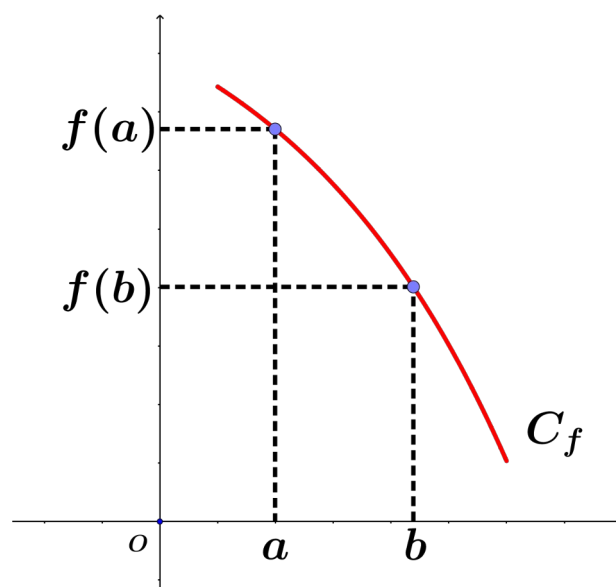
- Lorsque x augmente, $f(x)$ augmente.
- $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans le même ordre que a et b .

Exemples

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x$ est croissante sur $\mathbb{R}$. La courbe représentative de la fonction f est une droite qui « monte » infiniment.
- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$.

Définition 14

La fonction f est **décroissante** sur l'intervalle I (respectivement **strictement décroissante** sur I) lorsque, quels que soient les réels a et b de I : si $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$ (respectivement si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$).



Remarques

Si f est décroissante, on peut dire :

- Lorsque x augmente, $f(x)$ diminue.
- $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans l'ordre contraire de a et b .

Exemples

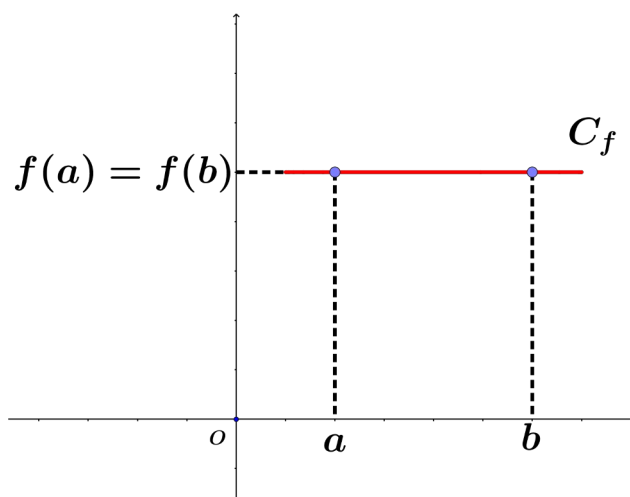
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 2$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative est une droite qui « descend » infiniment.
- La fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$.

Remarque générale

Avec des inégalités strictes, on dit que f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Définition 15

La fonction f est **constante** sur l'intervalle I lorsque, quels que soient les réels a et b de I : si $a < b$, alors $f(a) = f(b)$.

**Remarque**

Une fonction constante sur I peut être considérée comme croissante **et** décroissante sur I .

Attention!

Pour définir le sens de variation d'une fonction, il est fondamental de préciser « pour tous réels a et b de I ».

En effet, pour la fonction $f : x \rightarrow x^2$ définie sur $I = [-2; 2]$, on a : $-1 < 2$ et $f(-1) \leq f(2)$.

Donc « il existe a et b tels que $f(a) < f(b)$ ».

Mais cette affirmation n'est pas vraie pour tout a et b de I (par exemple $a = -2$ et $b = 0$) car la fonction f n'est pas croissante sur I .

Définition 16

On dit qu'une fonction est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante.

V. Tableau de variations et extremum d'une fonction

Définition 17

Pour représenter les variations d'une fonction f , on utilise un tableau avec des flèches représentant la monotonie sur des intervalles les plus grands possibles.

Il faut apparaître les intervalles sur lesquels la fonction est **croissante par une flèche montante** et ceux sur lesquels la fonction est **décroissante par une flèche descendante**. De plus, si on les connaît, on écrit les **images au bout des flèches**.

L'ensemble forme le **tableau de variations** de la fonction f .

Exemple

Pour une fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 3,5]$, croissante sur $[-3; -1]$, décroissante sur $[-1; 1]$ puis croissante sur $[1; 3,5]$, le tableau de variations est le suivant :

x	-3	-1	1	3,5
$f(x)$	-2,3	1	0,4	6,1

Remarque

Dans un tableau de variations, il est convenu que les flèches obliques indiquent que la fonction est strictement monotone.

Définition 18

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I .

• On dit que le réel M est le **maximum** de f sur I , **atteint** en a , si $f(a) = M$ et si pour tout réel x de I , on a $f(x) \leq M$.

• On dit que le réel m est le **minimum** de f sur I , **atteint** en a , si $f(a) = m$ et si pour tout réel x de I , on a $f(x) \geq m$.

• Un **extremum** de f sur I est un **maximum** ou un **minimum** de f sur I .

• On dit que le réel L est un **maximum** (respectivement **minimum**) local de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I , tel que L est le maximum (respectivement minimum) de f sur J .

Remarques

• Les pluriels de "minimum", "maximum" et "extremum" sont "minima", "maxima" et "extrema".

• On dit que $f(a)$ est le maximum (ou le minimum) de f sur I atteint pour $x = a$.

• On différencie maximum **global** et **local** :

Un maximum **global** correspond à la valeur la plus grande sur tout l'ensemble de définition.

Un maximum **local** correspond à la valeur la plus grande sur une partie de l'ensemble de définition.

Reprenons l'exemple précédent. Il y a deux maximums qui sont 1 et 6,1. 1 est un maximum local alors que 6,1 est un maximum global.