

Chapitre 4

Dérivation et convexité

I. Rappels sur la dérivation

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un nombre réel de I . Soit h un nombre réel non nul suffisamment petit.

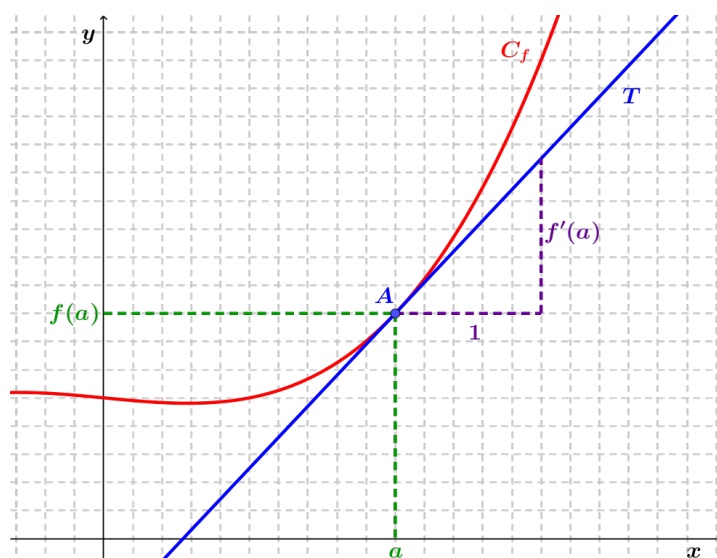
On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un réel quand h tend vers 0, qu'on note $f'(a)$ et qu'on appelle nombre dérivé de la fonction f en a . On écrit alors : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h)$, soit $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable en a . L'équation réduite de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse a est : $T : y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Interprétation graphique

Si f est dérivable en a et de nombre dérivé $f'(a)$ en a , alors la tangente à C_f au point d'abscisse a existe et son coefficient directeur est $f'(a)$.



Définition 3

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I .

On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à chaque x associe $f'(x)$.

Remarques

Toutes les fonctions usuelles vues en première et en terminale sont dérivables sur leur domaine de définition, à l'exception des fonctions racine carrée et valeur absolue en 0.

Formules de dérivation des fonctions usuelles

Fonction	D_f	Fonction dérivée	$D_{f'}$
$f(x)=k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=mx+p$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=m$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x)=x^n, n \geq 1$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}, n \geq 1$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=e^x$	$\mathbb{R}$

Formules de dérivation sur les opérations de fonction

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Fonction	Fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$u-v$	$u'-v'$
$\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'$
uv	$u'v+uv'$
u^2	$2uu'$
$\frac{1}{v}, v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}, v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$u^n, n \geq 1$	$nu'u^{n-1}$

Théorème 4

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$, alors la fonction f est croissante sur I .
- Si pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$, alors la fonction f est décroissante sur I .
- Si pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur I .
- Si f' est **strictement positive** (respectivement **strictement négative**) sur I , sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est **strictement croissante** (respectivement **strictement décroissante**) sur I .

Propriété 5

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

- Si f admet un **extremum local** en a , alors $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe en a , alors la fonction f admet un **extremum local** en a .

II. Compléments sur la dérivation**II.1 Fonction composée****Définition 6**

Soit u une fonction définie sur un intervalle I à valeur dans un intervalle J et v une fonction définie sur un intervalle J .

La **composée de u par v** , notée $v \circ u$, est la fonction définie sur I par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

Remarques

- $v \circ u$ se lit « v rond u ».
- L'expression « u est définie sur un intervalle I à valeurs dans J » signifie que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$.
- On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} v \circ u : & I & \rightarrow & J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \xrightarrow{u} & u(x) & \xrightarrow{v} & v(u(x)) \end{array}$$

Attention!

En général, $v \circ u \neq u \circ v$.

Exemple

Soit la fonction v définie sur $J = [0; +\infty[$ par $u(x) = \sqrt{x}$ et u la fonction définie sur $I = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$ par $u(x) = 2x - 5$. Alors la fonction $v \circ u$ est définie sur I car :

$$x \in I \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x \geq 5 \Leftrightarrow 2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow u(x) \in J.$$

On a, pour tout $x \in I$, $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(2x - 5) = \sqrt{2x - 5}$.

Propriété 7

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I par $g(x) = ax + b$, où a et b sont des réels tels que $g(x) \in J$ pour tout $x \in I$.
Alors la fonction $f \circ g$ est dérivable sur I , et on a pour tout réel $x \in I$, $(f \circ g)'(x) = a f'(ax + b)$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Exemple

Soit la fonction h définie sur $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$ par $h(x) = \sqrt{2x-5}$.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est la fonction racine carrée dérivable sur $]0; +\infty[$.

Pour tout réel x de $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$, on a $2x-5 > 0$, c'est-à-dire $g(x) > 0$ et donc $g(x) \in]0; +\infty[$.

Ainsi, la fonction h composée de f et g est dérivable sur $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$.

Pour tout $x \in \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$, $h'(x) = (f \circ g)'(x) = a f'(ax + b) = 2 f'(\frac{1}{2}(2x-5)) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x-5}} = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$.

Remarque

La composée de u par v , notée $v \circ u$, est dérivable de forme $(v \circ u)' = u'(v' \circ u)$.

II.2 Cas particuliers

Propriété 8

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel non nul.

- Si u est strictement positive sur I , la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et on a $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- La fonction u^n est dérivable sur I et on a $(u^n)' = n u' u^{n-1}$.
- La fonction $\frac{1}{u^n}$ est dérivable sur I si u ne s'annule pas sur I et on a $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n \frac{u'}{u^{n+1}}$.
- La fonction e^u est dérivable sur I et on a $(e^u)' = u' e^u$.

Démonstration

Les résultats découlent directement de la dérivée d'une composée.

Exemples

• Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x-5}$.

La fonction f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 2x-5$. Elle est définie et dérivable si ce qui est sous la racine est strictement positif, c'est-à-dire si $u(x) > 0$. Or $2x-5 > 0 \Leftrightarrow 2x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$.

Ainsi, la fonction f est dérivable sur $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$ et on a $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2}{2\sqrt{2x-5}} = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$.

• Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 3)^5$. La fonction g est de la forme u^n avec $u(x) = x^2 - 3$ et $n = 5$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2x$.

Ainsi, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g'(x) = 5 \times 2x(x^2 - 3)^{5-1} = 10x(x^2 - 3)^4$.

• Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$. La fonction h est de la forme $\frac{1}{u^n}$ avec

$u(x) = x^2 + 1$, $n = 3$ et pour tout réel x , $u(x) > 0$.

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2x$.

Ainsi, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $h'(x) = -3 \frac{2x}{(x^2 + 1)^{3+1}} = -\frac{6x}{(x^2 + 1)^4}$.

• Soit la fonction i définie sur $\mathbb{R}$ par $i(x) = e^{x^2}$. La fonction i est de la forme e^u avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2x$.

Ainsi, la fonction i est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $i'(x) = 2x e^{x^2}$.

II.3 Dérivée seconde

Définition 9

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On note f' sa fonction dérivée.

La fonction f est **deux fois dérivable** sur I si f' est elle-même dérivable sur I .

On note f'' la dérivée de f' . Elle est appelée **dérivée seconde** de f .

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5x + e^x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de telles fonctions et on a $f'(x) = 3x^2 + 5 + e^x$.

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de telles fonctions et on a $(f')'(x) = 6x + e^x$.

f est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est définie par $f''(x) = 6x + e^x$.

III. Convexité

III.1 Fonctions convexes et concaves

Définition 10

Soit f une fonction, C_f sa courbe représentative dans un repère et A et B deux points de C_f . Alors la droite (AB) est appelée **sécante** de C_f .

Définition 11

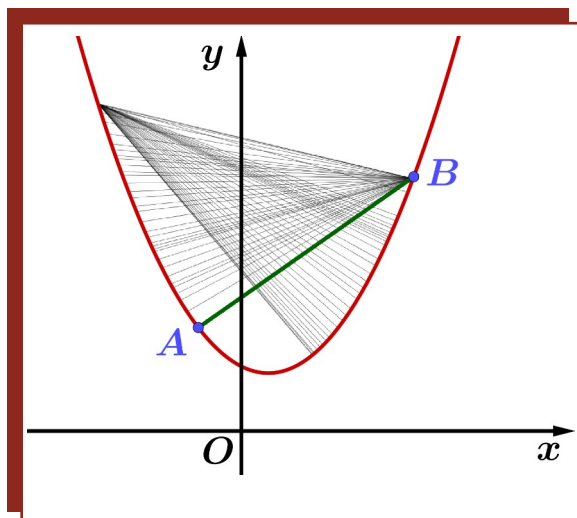
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative dans un repère.

• f est **convexe** sur I si, pour tout $x \in I$, C_f est **en dessous de ses sécantes**.

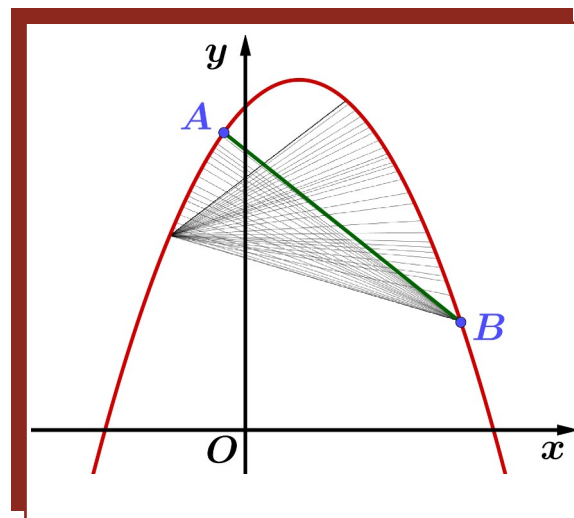
• f est **concave** sur I si, pour tout $x \in I$, C_f est **au-dessus de ses sécantes**.

Exemples

La fonction ci-dessous est convexe



La fonction ci-dessous est concave



Remarques

- Une fonction est convexe si sa courbe représentative est au-dessus de chacune de ses tangentes.
- Une fonction est concave si sa courbe représentative est en dessous de chacune de ses tangentes.
- Étudier la convexité d'une fonction revient à déterminer sur quel(s) intervalle(s) elle est convexe ou concave.

Propriété 12

- Les fonctions carrée et exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est concave sur $[0; +\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $] -\infty; 0[$ et convexe sur $] 0; +\infty[$.
- La fonction cube est concave sur $] -\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$.

Démonstration

Les résultats se retrouvent graphiquement.

Propriété 13

- Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .
- Si f est une fonction convexe sur I , alors $-f$ est concave sur I .
 - Si f est une fonction concave sur I , alors $-f$ est convexe sur I .

Démonstration

Les résultats découlent directement de la symétrie axiale d'axe les abscisses entre f et $-f$.

Exemple

La fonction $x \rightarrow x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \rightarrow -x^2$ est concave sur $\mathbb{R}$.

III.2 Convexité des fonctions dérivables

Théorème 14

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **convexe** sur I si et seulement si f' est **croissante** sur I .
- La fonction f est **concave** sur I si et seulement si f' est **décroissante** sur I .

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 5x - 3$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x + 5$. La fonction f' étant une fonction affine de coefficient directeur positif, elle est croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit donc que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Théorème 15

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **convexe** sur I si et seulement si f'' est **positive** sur I .
- La fonction f est **concave** sur I si et seulement si f'' est **négative** sur I .

Démonstration

- f est convexe si et seulement si f' est croissante si et seulement si f'' est positive.
- f est concave si et seulement si f' est décroissante si et seulement si f'' est négative.

Exemple

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$.

On a successivement $f'(x) = 3x^2 - 6x$ puis $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$.

Or $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

La dérivée seconde est donc négative sur $]-\infty; 1]$ et positive sur $[1; +\infty[$.

Ainsi la fonction f est concave sur $]-\infty; 1]$ et convexe sur $[1; +\infty[$.

Propriété 16

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I .

Si f'' est **positive** sur I , alors la courbe représentative de f est **au-dessus de chacune de ses tangentes**.

Démonstration

Soit ϕ la fonction définie sur I par la différence la fonction et sa tangente.

$$\forall x \in I, \phi(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) = f(x) - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - f(x_0).$$

ϕ est dérivable sur I en tant que somme de telles fonctions et on a :

$$\forall x \in I, \phi'(x) = f'(x) - f'(x_0) + 0 = f'(x) - f'(x_0).$$

Or f'' est positive, donc f' est croissante. D'où :

Si $x \geq x_0$, alors $f'(x) \geq f'(x_0)$ et donc $\phi'(x) \geq 0$.

Si $x \leq x_0$, alors $f'(x) \leq f'(x_0)$ et donc $\phi'(x) \leq 0$.

De plus, $\phi(x_0) = f(x_0) - f'(x_0)x_0 + f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0$.

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
signe de f'	– +		
$f(x)$	↘ 0 ↗		

Pour tout réel x de I , $\phi(x) \geq 0$ et donc $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Autrement dit, la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Remarque

Si f'' est négative sur I , alors la courbe représentative de f est en dessous de chacune de ses tangentes.

Attention!

La réciproque est fautive car une fonction convexe n'est pas nécessairement deux fois dérivable.

III.3 Point d'inflexion

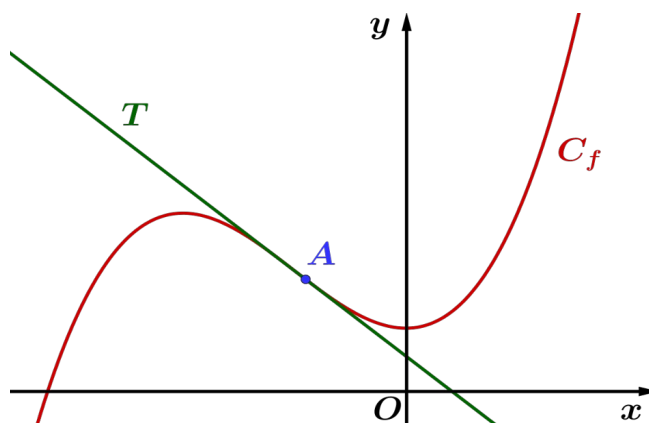
Définition 17

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Un **point d'inflexion** est un point où la représentation graphique de f traverse sa tangente.

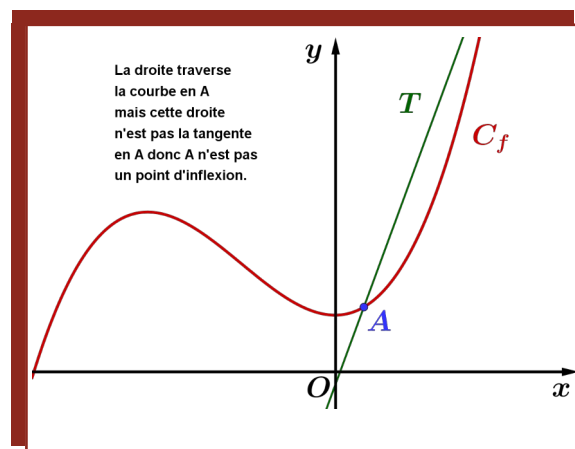
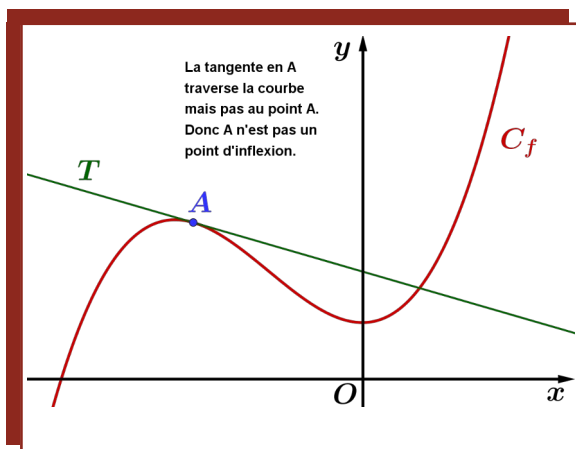
Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet un point d'inflexion, alors la fonction change de convexité.

Représentation graphique



Attention!

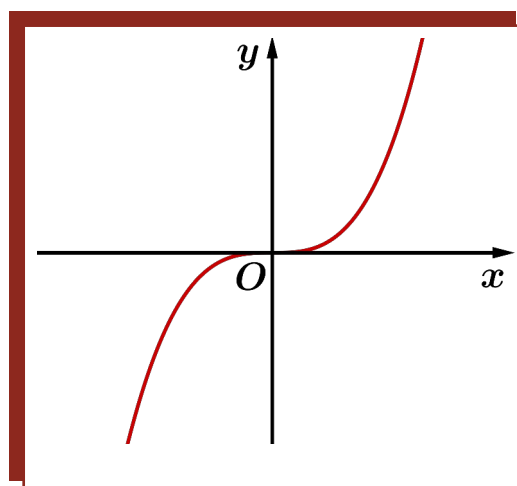
Dans les deux cas suivants, le point A n'est pas un point d'inflexion :

**Exemple**

La représentation graphique de la fonction $x \rightarrow x^3$ admet comme point d'inflexion le point $O(0;0)$, origine du repère.

En effet, $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$.

La tangente à la courbe au point O est l'axe des abscisses. La courbe traverse la tangente en O donc O est un point d'inflexion.

**Propriété 18**

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

f' change de sens de variations sur I en a si et seulement si sa courbe $C_{f'}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a . Ce point a pour coordonnées $(a; f'(a))$.

Démonstration

f' change de variation en a si et seulement si la fonction f change de convexité en a . Ainsi la courbe représentative de f admet un point d'inflexion.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{3}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = x^2$. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'			
f	concave		convexe

Comme f' change de variations en $x=0$, alors la courbe représentative de f admet un point d'inflexion en $x=0$.

Propriété 19

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et a un réel de I . La courbe représentative de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a . Ce point a pour coordonnées $(a; f(a))$.

Démonstration

f'' s'annule en changeant de signe en a si et seulement si f' change de sens de variations en a . Ceci implique que f change de convexité en a et que sa courbe représentative admet un point d'inflexion en a .

Attention!

La condition $f''(c)=0$ n'implique pas en général que le point d'abscisse c est un point d'inflexion. C'est vrai si en plus f'' change de signe.

Exemples

• Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de f''	– +		
$f'(x)$			
f	concave		convexe

Donc $f''(0)=0$ et change de signe. Donc C_f admet un point d'inflexion en $x=0$.

• Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2$.

On a $f''(0) = 12 \times 0^2 = 0$ mais $f''(x) \geq 0$. Comme f'' ne change pas de signe en $x=0$, alors le point de coordonnées $(0; 0)$ n'est pas un point d'inflexion.