

Position relative d'une courbe par rapport à ses tangentes

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 0[$ par $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$.

On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et déterminer $f'(x)$.
2. Soit g la fonction définie sur $] -\infty; 0[$ par $g(x) = 2x^3 - 1$.
 - a. Dresser le tableau de variation de la fonction g .
 - b. En déduire le signe de la fonction g sur $] -\infty; 0[$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $] -\infty; 0[$.
4. Soit A le point de C_f d'abscisse -1 .
 - a. Écrire l'équation réduite de la tangente T_A à la courbe C_f au point A .
 - b. Représenter C_f et T_A à l'aide de la calculatrice ou GeoGebra.
 - c. Soit M un point d'abscisse x situé sur C_f . On note P le point d'abscisse x situé sur T_A . Pour tout réel $x < 0$, exprimer $d(x) = y_M - y_P$ en fonction de x .
 - d. Étudier le signe de $2x^3 + 3x^2 - 1$ puis en déduire les variations de d sur $] -\infty; 0[$.
 - e. Après avoir calculé $d(-1)$, déterminer la position relative de C_f par rapport à la tangente T_A selon les valeurs de x .
 - f. Sachant qu'une fonction convexe est une fonction dont la courbe représentative est située au-dessus de ses tangentes, conjecturer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
 - g. Que se passe-t-il pour la tangente au niveau du point A ?

Lien entre convexité et dérivation

1. Tracer la courbe de la fonction $f : x \rightarrow x^3$ dans un repère orthonormé.
 2. Placer deux points A et B d'abscisses négatives et tracer le segment $[AB]$ (auss appelé sécante). Comment est situé ce segment par rapport à la courbe C_f ?
- Faire de même avec deux points C et D d'abscisses positives puis avec les points E et F d'abscisses respectives -2 et 2 .
3. Déterminer l'expression dérivée de f .
 4. Dresser les tableaux de variation et de signe de f' .
 5. On note f'' , qui se lit « f seconde », la fonction dérivée de f' . Déterminer le signe de f'' .
 6. Compléter le tableau ci-dessous :

x	$] -\infty; 0[$	$[0; +\infty[$
Sécantes		
Tangentes	au-dessus de C_f	en dessous de C_f
Variations de f'		
Signe de f''		
Fonction f	concave	convexe