

Modélisation quadratique

I. Fonctions polynômes du second degré

I.1 Définitions

On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme**) toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$. Cette expression est appelée **forme développée** de f .

Soit f la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On dit que la courbe représentative de cette fonction est une **parabole**.

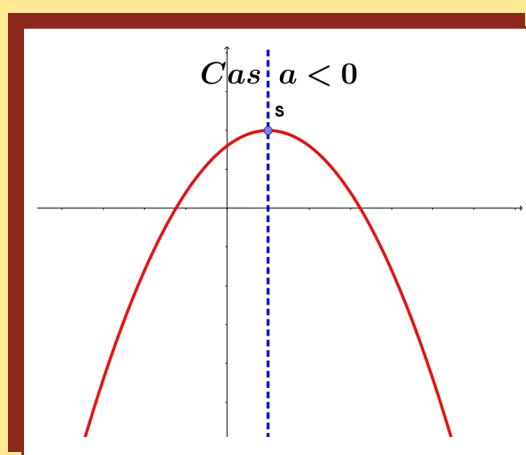
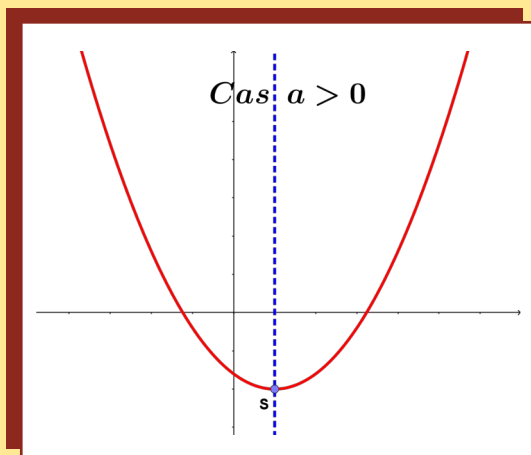
Une parabole a une forme de « U » (« tournée vers le haut ») lorsque a est positif.

A l'inverse, si a est négatif, la parabole a une forme de « pont » (« tournée vers le bas »).

Dans les deux cas, la parabole possède comme **axe de symétrie** la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

On appelle généralement **S le sommet** d'une parabole.

S a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.



Méthode : Démontrer qu'une fonction polynôme de degré 2 admet un extremum

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

a. Démontrer que pour tout x réel, $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$.

b. En déduire que f admet un minimum dont on précisera la valeur.

a. En développant la 2^e expression, on obtient :

$$(2(x-3))^2 + 5 = 2(x^2 - 6x + 9) + 5 = 2x^2 - 12x + 18 + 5 = 2x^2 - 12x + 23 = f(x).$$

b. On regarde le signe de a : $a = 2 > 0$.

La parabole est « tournée vers le haut », donc f admet un minimum.

Or la deuxième expression correspond à la forme canonique, d'où on peut lire la valeur du minimum qui est 5, atteint pour $x = 3$.

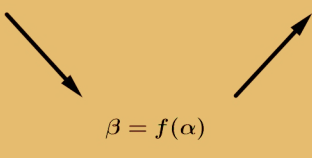
I.2 Sens de variations

Soit f une fonction polynomiale du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

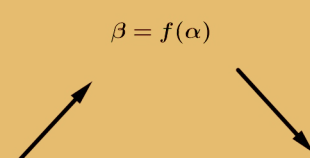
• Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$. Elle admet comme minimum β en $x = \alpha$.

• Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$. Elle admet comme maximum β en $x = \alpha$.

Cas $a > 0$

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f(x)			

Cas $a < 0$

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f(x)			

La courbe représentative de f dans un repère orthonormé admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$ et pour sommet le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$.

Méthode : Établir les variations d'une fonction du second degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.

a. Calculer les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction f .

b. La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum. Justifier.

c. Construire le tableau de variations de f , puis tracer sa courbe représentative dans un repère.

a. On calcule les coordonnées du sommet S :

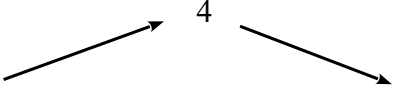
On a $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-1)} = -\frac{4}{-2} = 2$ et $\beta = f(\alpha) = f(2) = -2^2 + 4 \times 2 = -4 + 8 = 4$.

Donc $S(2; 4)$.

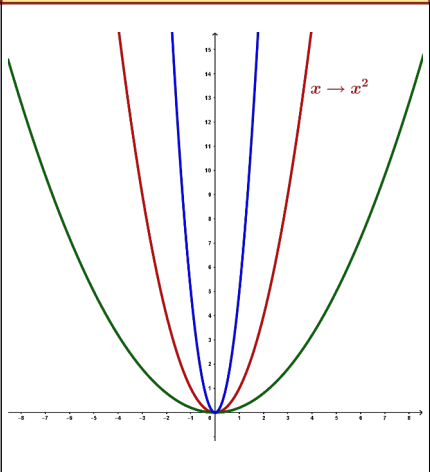
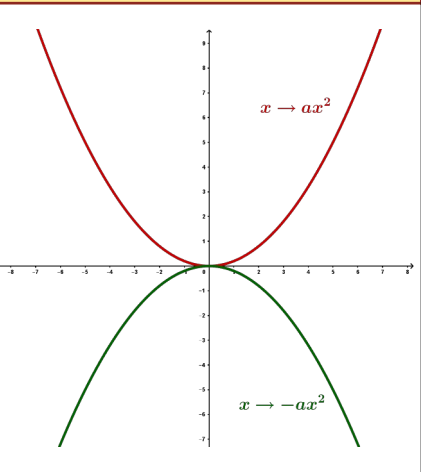
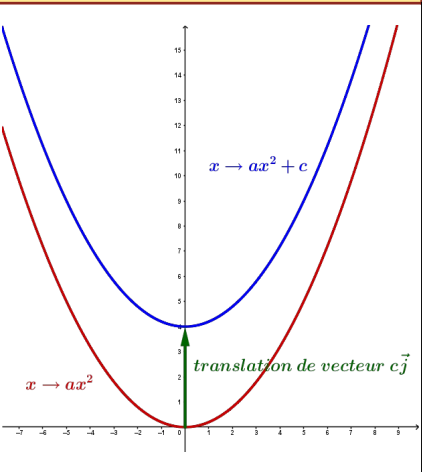
b. On regarde le signe de a : $a = -1 < 0$.

La parabole est « tournée vers le bas », donc f admet un maximum. Ce maximum est 4.

c. Tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f(x)			

I.3 Fonctions particulières $x \rightarrow ax^2$ et $x \rightarrow ax^2 + c$

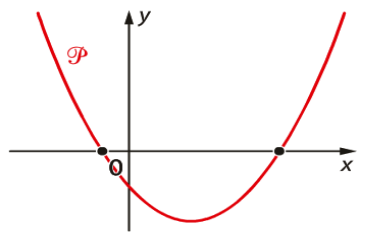
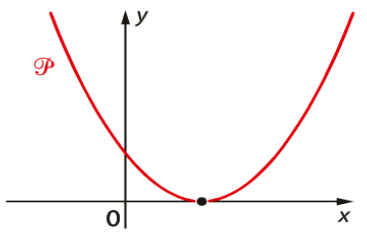
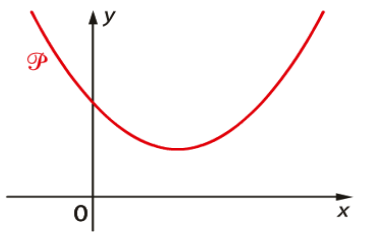
Influence du coefficient a ($a > 0$)	Passage de $a > 0$ à $a < 0$	Influence du coefficient c
		
L'axe de symétrie des différentes courbes est la droite d'équation $x = 0$ Cas : $a > 1$ Plus a est grand et plus la courbe « se contracte » Cas : $0 < a < 1$ Plus a est proche de zéro et plus la courbe « s'écarte »	La courbe représentative de la fonction $x \rightarrow -ax^2$ est symétrique à celle de la fonction $x \rightarrow ax^2$ par rapport à l'axe des abscisses	La courbe représentative de la fonction $x \rightarrow ax^2 + c$ s'obtient en effectuant une translation de vecteur $c \vec{j}$ à partir de la courbe représentative de la fonction $x \rightarrow ax^2$

II. Équation du second degré

II.1 Approche graphique

Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \neq 0$, c'est trouver, s'il en existe, tous les nombres x qui vérifient cette égalité. De tels nombres sont appelés **solutions de l'équation** ou **racines** du trinôme. Pour trouver le nombre de solutions de cette équation, on peut s'aider de la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Dans les trois exemples ci-dessous, on peut conjecturer que l'équation admet respectivement deux solutions, une solution et aucune solution.

 $\mathcal{P}$ coupe deux fois l'axe des abscisses.	 $\mathcal{P}$ coupe une fois l'axe des abscisses.	 $\mathcal{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses.
--	---	---

II.2 Vocabulaire

Une **équation du second degré**, d'inconnue x , est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a , b et c sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.

Une solution de cette équation est appelée **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

III. Fonctions polynômes du second degré admettant deux racines

III.1 Forme factorisée

Soit f une fonction du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. On a la factorisation suivante :

- Si f admet **deux racines** x_1 et x_2 , alors on a pour tout réel x , $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si f admet **une racine double** x_0 , alors on a pour tout réel x , $f(x) = a(x - x_0)^2$.

Remarque

Si $x_1 = x_2$, alors on dit que f admet une racine double que l'on note x_0 .

La représentation graphique des fonctions de la forme $x \rightarrow a(x - x_1)(x - x_2)$ est une parabole d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

L'abscisse du sommet de la parabole est alors $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

III.2 Signe d'une fonction polynôme du second degré

Soit la fonction polynomiale $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

- Si f admet deux racines x_1 et x_2 , alors $f(x)$ s'annule pour $x = x_1$ et $x = x_2$ (on suppose que $x_1 < x_2$) et alors :

- le signe de $f(x)$ est **du signe de a** pour x extérieur à l'intervalle des racines ;
- le signe de $f(x)$ est **du signe contraire de celui de a** si x est compris entre les racines.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

- Si f admet une racine double, alors $f(x)$ s'annule pour $x = x_0$: **son signe est celui de a** pour tous les réels $x \neq x_0$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a