

Limites de fonctions

I. Limites en l'infini

I.1 Limite infinie

- Une fonction f admet une limite infinie égale à $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

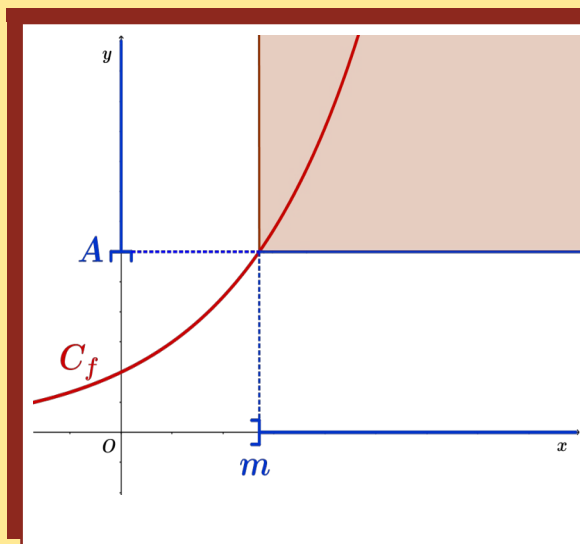
Autrement dit, pour tout réel A , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) > A$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Une fonction f admet une limite infinie égale à $-\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

Autrement dit, pour tout réel A , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) < A$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.



On a pour tout entier naturel n non nul :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \text{ si } n \text{ est pair}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \text{ si } n \text{ est impair}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

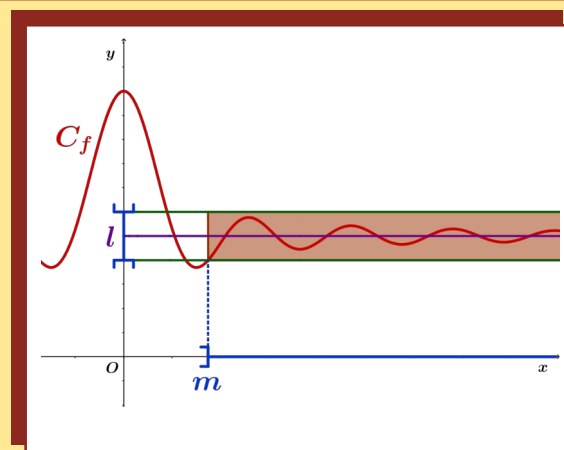
I.2 Limite finie

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et l un réel.

La fonction f admet une limite finie égale à l si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

Autrement dit, pour tout intervalle J contenant l , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) \in J$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.



Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$, alors la droite d'équation $y = l$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$ ou $-\infty$.

On a pour tout réel k et tout entier naturel n non nul :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} k = \lim_{x \rightarrow -\infty} k = k$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

II. Limite en un point

II.1 Limite infinie

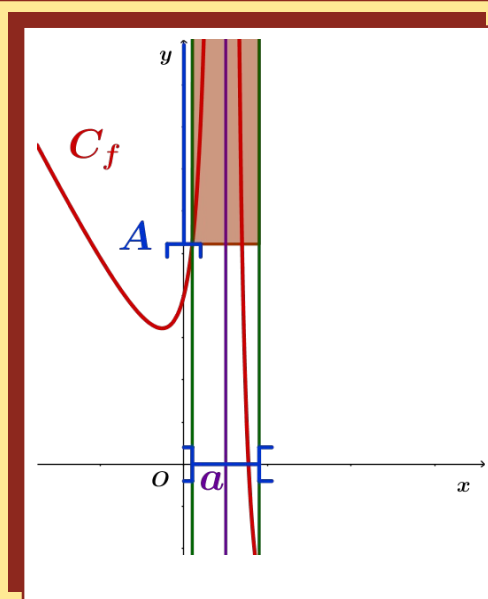
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel étant une borne de I .

- La fonction f admet une limite infinie égale à $+\infty$ en a si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

Autrement dit, pour tout réel A , il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que si $x \in J \cap I$, alors $f(x) > A$.
On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

- La fonction f admet une limite infinie égale à $-\infty$ en a si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

Autrement dit, pour tout réel A , il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que si $x \in J \cap I$, alors $f(x) < A$.
On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.



Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f en a .

II.2 Limite à gauche, limite à droite

- On dit que f admet une **limite à droite en a** lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x > a$. On note cette limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- On dit que f admet une **limite à gauche en a** lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x < a$. On note cette limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.
- Soit a un réel et f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.
La fonction f a une limite infinie en a si f possède une limite à gauche en a , une limite à droite en a (infinies) et que ces **limites sont égales**. On a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

II.3 Limite finie

Une fonction f admet une limite finie l en a lorsque $f(x)$ est aussi proche de l que voulu pour x suffisamment proche de a . On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

III. Opérations sur les limites

III.1 Limites d'une somme de fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

III.2 Limites d'un produit de fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

III.3 Limites d'un quotient de fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l' et $l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0 et $g(x) > 0$	0 et $g(x) > 0$	0 et $g(x) < 0$	0 et $g(x) < 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

IV. Théorèmes sur les limites

Limites en l'infini d'une fonction polynomiale

La limite en l'infini d'une fonction polynomiale est égale à la limite en l'infini de son terme de plus haut degré.

Limites en l'infini d'une fonction polynomiale

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la **limite en l'infini du quotient du terme de plus haut degré du numérateur par le terme de plus haut degré du dénominateur**.

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I tel que $g(x) \in J$ pour tout $x \in I$. On définit la composée de g par f comme la fonction définie sur I par : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} f \circ g : & I & \rightarrow & J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \xrightarrow{g} & g(x) & \xrightarrow{f} & f(g(x)) \end{array}$$

Limite d'une composée de fonctions (hors programme)

Soit les fonctions f et g et trois nombres a , b et c désignant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} f(X) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c$.

V. Limites et comparaison

Soit f , g et h trois fonctions définies un intervalle ouvert I et l et a deux réels tel que a appartient à I ou a est une borne de I . Si pour tout $x \in I$, on a :

Théorème de comparaison

- $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.
- $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Théorème d'encadrement

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.