

Modélisation quadratique**Exercice 1**

Précisez pour chacune des expressions suivantes si elle est un polynôme du second degré (trinôme) et si oui, donner la valeur de chacun de ses coefficients.

- a. $f(x) = 4x^2 - 2x + 6$; b. $g(x) = -5x^2 + 4x - 3$; c. $h(x) = x + 9$;
d. $j(x) = x^2 + 4$; e. $k(x) = (x + 2)(x - 3)$; f. $l(x) = (x + 4)^2$.

Exercice 2

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 30x + 83$.

- a. Déterminer les coefficients a , b et c de f .
b. Calculer les coordonnées du sommet de la parabole associée à f . Précisez si f admet un minimum ou un maximum. Enfin, préciser l'axe de symétrie.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 - 8x - 15$.
a. Déterminer les coefficients a , b et c de g .
b. Calculer les coordonnées du sommet de la parabole associée à g . Précisez si g admet un minimum ou un maximum. Enfin, préciser l'axe de symétrie.

Exercice 3

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2x^2 + 10x - 7$. Construire la représentation graphique de h .

Exercice 4

On reprend les fonctions $f(x) = 3x^2 - 30x + 83$ et $g(x) = -x^2 - 8x - 15$ de l'exercice 2.

1. Vérifier que pour tout x réel, on a $f(x) = 3(x - 5)^2 + 8$ et $g(x) = -(x + 4)^2 + 1$.
2. Calculer les coordonnées du sommet de la parabole associée à f puis à g puis leur axe de symétrie.

Exercice 5

Donner les coordonnées du sommet pour chaque parabole, et précisez l'extremum de la fonction.

- a. $f(x) = 2(x - 3)^2 + 8$; b. $g(x) = -4(x - 2)^2 - 4$; c. $h(x) = 8(x + 2)^2 + 5$.

Exercice 6

Soit la fonction polynomiale f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

1. Vérifier que, pour tout réel x , on a $f(x) = -(x - 2)^2 + 1$.
2. Construire le tableau de variations de f et préciser l'extremum de la fonction.

Exercice 7

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x + 7)^2 - 2$ et $g(x) = -2(x + 4)^2 + 5$.

1. Déterminer la forme développée de f .
2. Donner le tableau de variation de f .
3. Préciser l'axe de symétrie de la parabole associée à la courbe de la fonction f .
4. Reprendre les questions précédentes pour la fonction g .

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 8$. Donner le tableau de variations de f .

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)(3x-2) - 5(x+1)^2$.

1. Déterminer :

- La forme développée de $f(x)$.
- La (ou une) forme factorisée de $f(x)$.
- Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

2. Répondre aux questions suivantes en choisissant la forme de $f(x)$ qui paraît la plus adéquate.

a. Calculer les images par f de 0 , -1 , $\frac{2}{3}$ et $\sqrt{5}$.

b. Trouver l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.

c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

d. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice 10

Pour chacun des polynômes suivants, déterminer les coordonnées du sommet, l'équation de l'axe de symétrie ainsi que l'orientation de la parabole.

1. $f(x) = x^2 - 5x + 7$;

2. $g(x) = -3x^2 + 6x - 1$;

3. $h(x) = 6x^2 - 12x + 5$;

4. $i(x) = 2(x-1)^2 + 5$.

Exercice 11

À partir de la courbe représentative de la fonction $x \rightarrow x^2$, donner à main levée l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \rightarrow -0,4x^2 + 2$.

Exercice 12

Expliquer les différentes étapes qui permettent de passer de la courbe représentative de la fonction $x \rightarrow x^2$ à celle des fonctions suivantes.

1. $x \rightarrow 2x^2$;

2. $x \rightarrow -x^2$;

3. $x \rightarrow x^2 - 5$;

4. $x \rightarrow x^2 + 7$;

5. $x \rightarrow 0,3x^2 - 2$;

6. $x \rightarrow 0,9x^2 + 1$.

Exercice 13

À partir de la représentation graphique de la fonction $x \rightarrow x^2$, tracer l'allure des courbes des fonctions suivantes.

1. $x \rightarrow 1,1x^2 - 3$;

2. $x \rightarrow -2x^2$;

3. $x \rightarrow 0,3x^2 - 5$;

4. $x \rightarrow -13x^2 - 1$.

Exercice 14

C_f et C_g sont les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 6x - 2x^2$.

1. Conjecturer graphiquement l'ensemble des réels x pour lesquels C_g est au-dessus de C_f .

2. Vérifier vos solutions par le calcul.

Exercice 15

Expliquer comment on passe de la courbe représentative de la fonction $x \rightarrow x^2$ à celle de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 2x^2 + 1$; 2. $g(x) = -0,5x^2 - 3$; 3. $h(x) = 0,3x^2 - 2$.

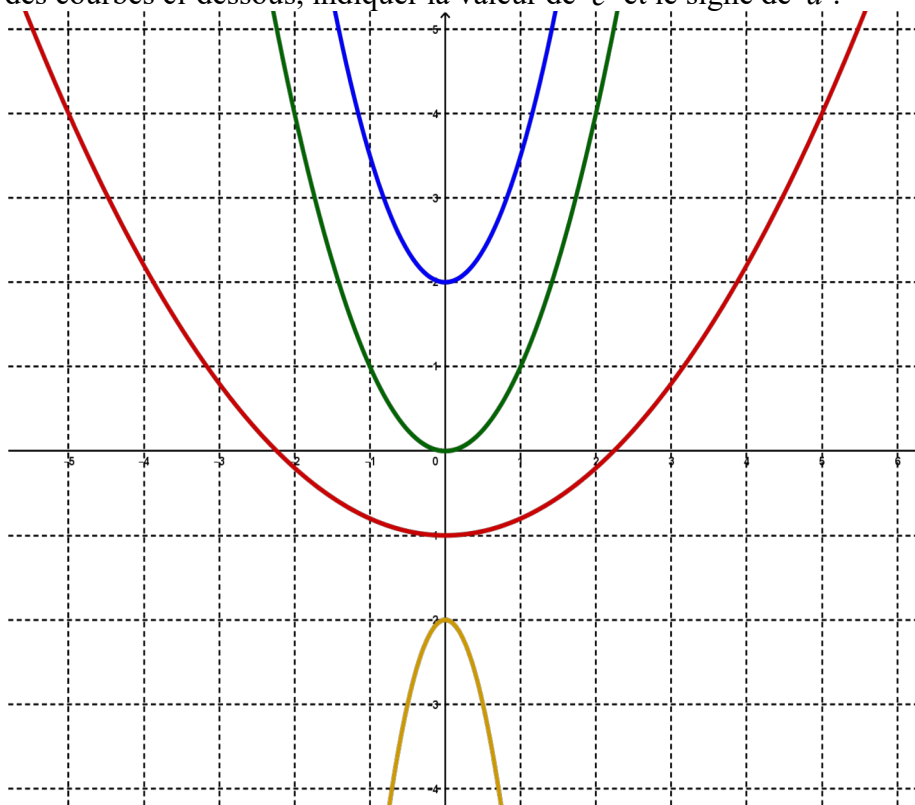
Exercice 16

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'allure des courbes de la parabole en précisant les coordonnées du sommet, puis en déduire le tableau de variations de la fonction sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = -5x^2 + 30x - 7$; 2. $g(x) = 6x^2 - 18x + 1$; 3. $h(x) = 0,3x^2 + 9x - 1,2$.

Exercice 17

Pour chacune des courbes ci-dessous, indiquer la valeur de c et le signe de a .

**Exercice 18**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 5$ et C_f sa courbe représentative.

1. Quelles sont les coordonnées du sommet de C_f ?
2. Quel est l'axe de symétrie de C_f .
3. Tracer l'allure de C_f en expliquant votre démarche.

Exercice 19

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3$ et C_f sa courbe représentative.

1. Quelles sont les coordonnées du sommet de C_f ?
2. Quel est l'axe de symétrie de C_f .
3. Tracer l'allure de C_f en expliquant votre démarche.

Exercice 20

Les fonctions ci-dessous sont définies sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = 0,5x^2 ;$$

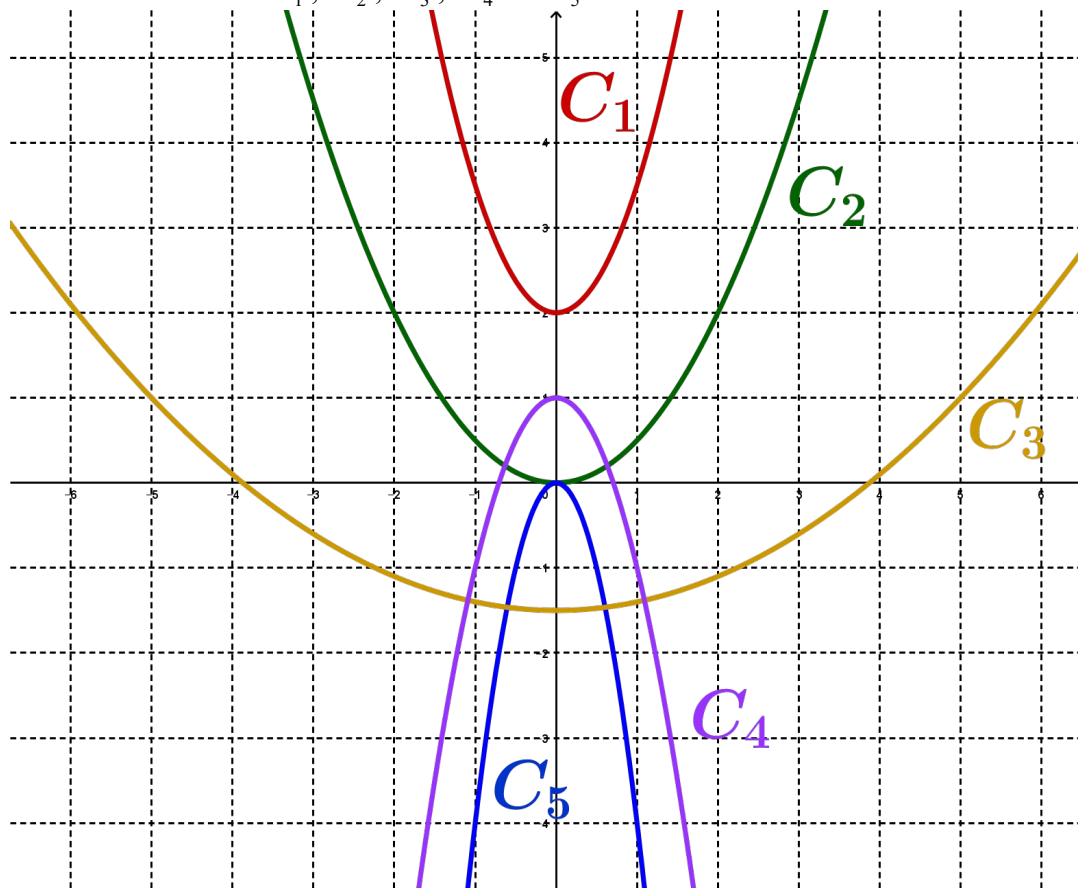
$$g(x) = 1,5x^2 + 2 ;$$

$$h(x) = -4x^2 ;$$

$$j(x) = 0,1x^2 - 1,5 ;$$

$$k(x) = -2x^2 + 1 .$$

Relier chacune des courbes C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 aux fonctions données ci-dessus.

**Exercice 21**

1. Soit l'équation du second degré $(E_1) : x^2 - 4x + 3 = 0$. Vérifier que 1 et 3 sont racines de (E_1) .
2. Soit l'équation du second degré $(E_2) : 2x^2 + 2x - 12 = 0$.
1 est-il une racine de (E_2) ? 4 est-il une racine de (E_2) ?

Exercice 22

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (on pourra s'aider de la calculatrice) :

a. $x^2 + 5x - 6 = 0$;

b. $x^2 + x + 2 = 0$;

c. $4x^2 - 12x + 9 = 0$;

d. $-2x^2 + 3x + 4 = 0$;

e. $3x^2 + 2x + 2 = 0$;

f. $x^2 + 4x + 4 = 0$;

g. $x^2 - 9x + 20 = 0$;

h. $2x^2 - 7x = 0$;

i. $3t^2 - 4t - 4 = 0$.

Exercice 23

Soit l'équation du second degré $5x^2 - 4x - 1 = 0$.

1. Combien de racines cette équation admet-elle ?
2. Vérifier que 1 est une racine. Quelle est l'autre racine ?

Exercice 24

Pour chaque équation, déterminer une solution évidente.

- a. $2x^2 + x - 3 = 0$; b. $3x^2 + 10x + 7 = 0$; c. $x^2 + (\sqrt{3}-1)x - \sqrt{3} = 0$;
 d. $x^2 + 4\sqrt{5}x - 25 = 0$; e. $x^2 - 9x + 8 = 0$; f. $2x^2 + 3x - 27 = 0$.

Exercice 25

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et C_f sa courbe représentative.

- Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = (x+1)(x-3)$. En déduire les racines de f .
- Calculer les coordonnées du sommet de la parabole C_f et son axe de symétrie.
- Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 6x - 20$ et C_f sa courbe représentative.

- Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = 2(x+2)(x-5)$. En déduire les racines de f .
- Calculer les coordonnées du sommet de la parabole C_f et son axe de symétrie.
- Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 27

Soit la forme développée du polynôme du second degré $f(x) = 0,5x^2 - 2,5x + 3$.

- Vérifier si les nombres suivants sont solutions de l'équation $0,5x^2 - 2,5x + 3 = 0$:
 -1 ; 2 ; 3 ; -2
- En déduire la forme factorisée de $f(x)$.

Exercice 28

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 - 5x + 4$.

- À l'aide de la calculatrice, tracer l'allure générale de la parabole de la fonction h .
- Conjecturer graphiquement les racines de la fonction h .
 - Vérifier algébriquement les résultats obtenus.
 - En déduire la forme factorisée de h .
 - Déterminer graphiquement les variations de la fonction h et les coordonnées du sommet.
 - Dresser les tableaux de variations et de signe de la fonction h .

Exercice 29

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-3)(x+2)$.

- Identifier les valeurs de a , x_1 et x_2 et calculer $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Que représente α ?
- Dresser les tableaux de variations et de signes de f .

Exercice 30

Soit $f(x) = (x-2)(x-4)$ une fonction polynomiale du second degré définie sur $\mathbb{R}$.

- Donner le signe de a et dire ce que cela entraîne pour les variations de f .
- Calculer le nombre $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
- Dresser les tableaux de variations et de signes de f .
- Reprendre les questions précédentes avec la fonction g définie par $g(x) = -2(x+1)(x-5)$.

Exercice 31

Soit le polynôme défini par $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

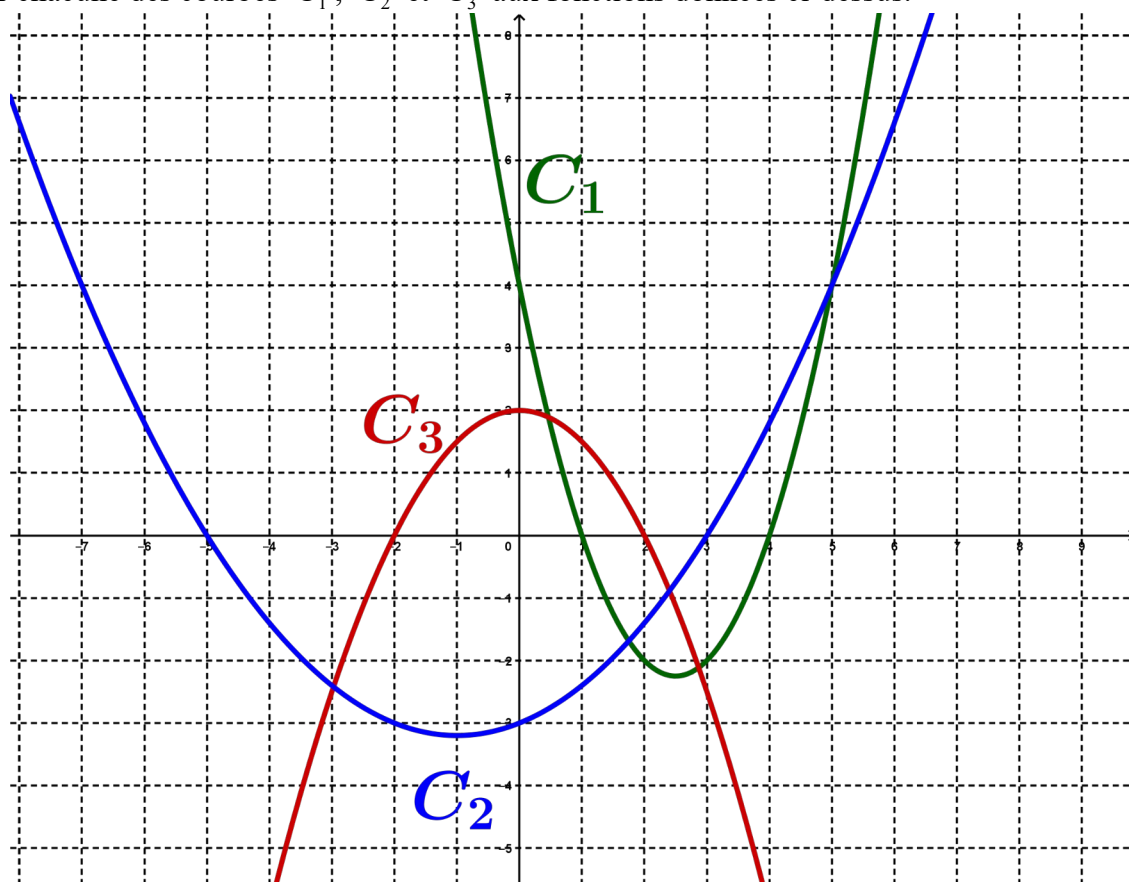
1. Vérifier que 1 et 3 sont racines de f .
2. Factoriser $f(x)$ et donner son tableau de signes.

Exercice 32

Les fonctions ci-dessous sont définies sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = (x-1)(x-4) ; \quad g(x) = -0,5(x-2)(x+2) ; \quad h(x) = 0,2(x-3)(x+5).$$

Relier chacune des courbes C_1 , C_2 et C_3 aux fonctions données ci-dessus.



Exercice 33

Soit la forme développée du polynôme du second degré $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$.

1. Vérifier que 1 est une racine de f .
2. Déterminer la forme factorisée de f .
3. Donner le tableau de signes de f .

Exercice 34

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

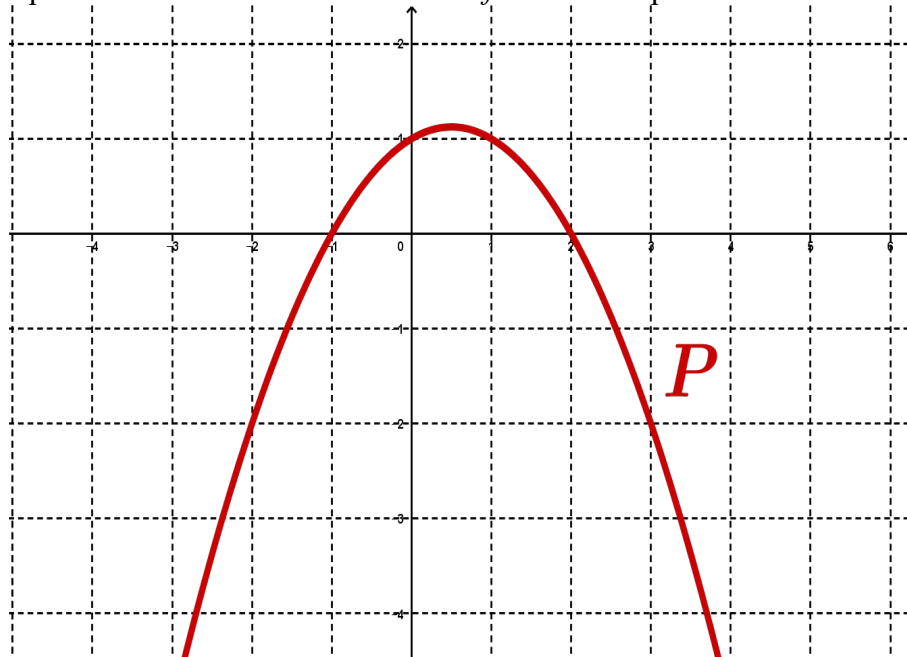
- | | | |
|-----------------------|------------------------|----------------------|
| a. $-9x^2 - 3x = 0$; | b. $(x+2)(3x-7) = 0$; | c. $9x(x-3) = 0$; |
| d. $-3x^2 - 9 = 0$; | e. $5x^2 - 25 = 0$; | f. $2x^2 + 32 = 0$. |

Exercice 35

Soit f la fonction définie par $f(x) = -2(x-2)(x+3)$. Établir sur $\mathbb{R}$ son tableau de signes.

Exercice 36

On considère la parabole P associée à la fonction f dans un repère orthonormé ci-dessous.



Déterminer la forme factorisée de la fonction f .

Exercice 37

Soit la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 3x - 18$.

1. Calculer $f(3)$ et $f(-2)$. Qu'en déduit-on ?
2. Déterminer le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 38

Soit f la fonction polynomiale du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x - 0,5)(x + 9)$. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 39

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7(x + 1)(x - 3)$.

1. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de l'inéquation $7(x + 1)(x - 3) > 0$.

Exercice 40

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 8x - 6$.

1. Calculer $f(-1)$ et $f(-3)$.
2. Factoriser f et dresser son tableau de signes.
4. Résoudre l'équation $f(x) = -6$.

Exercice 41

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 12x$.

1. Factoriser l'expression de f et en déduire ses racines.
2. Dresser les tableaux de signes et de variations de f .
3. Préciser son axe de symétrie.

Exercice 42

Soit la forme développée du polynôme du second degré $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$.

1. Vérifier que 1 est une racine de f .
2. Déterminer la forme factorisée de f et donner son tableau de signes.

Exercice 43

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5 - 2x)(3x - 2)$.

1. Quelles sont les racines de la fonction f ?
2. Écrire $f(x)$ sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$, où a , x_1 et x_2 sont des réels.
3. Donner les tableaux de signes et de variations de f .

Exercice 44

Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes dans un repère, en précisant leur sommet et leur axe de symétrie.

1. $f(x) = -3(x - 2)(x + 4)$;
2. $f(x) = \frac{3}{2}(x + 4)(x - 1)$;
3. $f(x) = 2x(x - 6)$;
4. $f(x) = \frac{1}{4}(x - 3)(x - 2)$;
5. $f(x) = 3(x + 7)(-x + 11)$;
6. $f(x) = 3x^2 - 12x$.

Exercice 45

Une entreprise produit et commercialise entre 2 et 17 tonnes d'engrais par jour.

Le bénéfice total, exprimé en centaines d'euros, réalisé pour la production de x tonnes d'engrais est modélisé à l'aide de la fonction B définie sur l'intervalle $[2; 17]$ par $B(x) = -x^2 + 20x - 64$.

1. Calculer le bénéfice réalisé lorsque l'entreprise produit et vend 10 tonnes d'engrais.
2. Vérifier que 4 est une racine de B . En déduire l'autre racine puis factoriser $B(x)$.
3. Résoudre l'inéquation $B(x) > 0$. En déduire la quantité d'engrais, exprimée en tonnes, que l'entreprise doit produire et vendre pour faire un bénéfice.

Exercice 46

Un artisan fabrique et vend jusqu'à 15 meubles par semaine. Le bénéfice, exprimé en euros, réalisé par la fabrication et la vente de x meubles est donné par $B(x) = -10x^2 + 140x - 400$.

1. Vérifier que 4 et 10 sont racines de B .
2. Résoudre dans l'intervalle $[0; 15]$ l'inéquation $B(x) > 0$.
3. Interpréter ce résultat.

Exercice 47

Un artisan fabrique des confitures qu'il vend par carton de dix pots. Le coût (en euros) de fabrication et de conditionnement de x cartons de dix pots de confiture est $C(x) = 0,25x^2 + 500$, pour x compris entre 0 et 160.

1. Pour combien de cartons le coût de fabrication et de conditionnement est-il égal à 2525€ ?
2. Chaque carton de confitures est vendu 30€. Exprimer la recette $R(x)$ en fonction de x .
3. Soit B la fonction bénéfice définie sur l'intervalle $[0; 160]$.
 - a. Déterminer l'expression de $B(x)$ en fonction de x .
 - b. Dresser le tableau de variations de B .
 - c. En déduire le nombre de cartons à vendre pour que le bénéfice réalisé soit maximal. Quel est ce bénéfice maximal ?