

## Limites de fonctions

### Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, on donne certaines limites d'une fonction  $f$ . Donner une interprétation graphique de chacune de ces limites.

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -\infty$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$ .

### Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x)$ .

1.  $f(x) = \frac{1}{x}$  et  $g(x) = \frac{3}{x}$ .
2.  $f(x) = x^2$  et  $g(x) = \frac{1}{x}$ .
3.  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  et  $g(x) = \frac{x}{1-x}$ .

### Exercice 3

Étudier la limite à droite et à gauche en  $a$  pour chacune des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \frac{x^3}{1-2x}$  en  $a = \frac{1}{2}$ .
2.  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  en  $a = 1$ .
3.  $f(x) = \frac{4x-5}{1-x}$  en  $a = 1$ .

### Exercice 4

Déterminer dans chaque cas la limite de  $f$  à l'endroit indiqué et préciser l'éventuelle asymptote.

1.  $f(x) = x^3 - 5x^2\sqrt{x} - 2x^2 + 12$  en  $+\infty$  ;
2.  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{3x^2 - 3x + 4}$  en  $-\infty$  ;
3.  $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x^2 + x - 2}$  en  $-2$  ;
4.  $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 7x + 12}$  en  $3$  ;
5.  $f(x) = \frac{\sin(x+1)}{x^2 - 1}$  en  $1$  ;
6.  $f(x) = x^6 - 4x^2 + 3$  en  $+\infty$  ;
7.  $f(x) = (7x^2 + 4x - 32)^{21}$  en  $-\infty$  ;
8.  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x^3}}{x}$  en  $0$ .

**Exercice 5**

Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \frac{4x-1}{3x+1}$  ;

2.  $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{3x^2+5}$  ;

3.  $f(x) = \frac{-4x+1}{x^2+1}$  ;

4.  $f(x) = \frac{3x^4+1}{3x+1}$  .

**Exercice 6**

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \frac{x-4}{-x^2+x+2}$  en  $2^+$  et  $+\infty$  ;

2.  $f(x) = \frac{3x-x^2}{x+3}$  en  $-\infty$  et en  $-3$  ;

3.  $f(x) = \frac{x^2\sqrt{x}-3x}{3x^2-3x+4}$  en  $+\infty$  ;

4.  $f(x) = \left(7x^2+4x-\frac{32}{(x-1)^2}\right)^{21}$  en 1 ;

5.  $f(x) = x^7+4x^2+3\pi$  en  $-\infty$  ;

6.  $f(x) = \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$  en 1 ;

7.  $f(x) = \frac{-3x^2+10x-3}{x^2-2x-3}$  en 3 ;

8.  $f(x) = \frac{\cos x+x}{x^3+2}$  en  $-\infty$  .

**Exercice 7**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$  par  $f(x) = \frac{2x-\sin x}{3x+1}$  .

1. Montrer que pour tout réel  $x \geq 0$  ,  $\frac{2x-1}{3x+1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{3x+1}$  .

2. En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$  .

**Exercice 8**

On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$  .

1. Montrer que pour tout réel  $x \geq 0$  ,  $4x^2 \leq 4x^2+x+1 \leq (2x+1)^2$  .

2. En déduire que pour tout réel  $x > 0$  ,  $2 \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x}$  .

3. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$  .

**Exercice 9**

On considère trois fonctions  $f$  ,  $g$  et  $h$  , définies sur  $\mathbb{R}$  , telles que pour tout réel  $x$  , on a :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si l'on sait que l'on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  alors on peut en déduire :

Réponse A :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  .

Réponse B :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  .

Réponse C :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$  .

**Exercice 10**

Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 3}}{x}$  ;

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x + 2}{x + 1}$  .

**Exercice 11**

1. Déterminer les limites suivantes (on justifiera soigneusement) :

a.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{(3 - x)^2}$  ;

b.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x - 2}$  ;

c.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{2x^2 + 3})$  ;

d.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x - 2}$  ;

2. Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus [3; 4]$  par  $f(x) = \frac{2x - 7}{-x^2 + 7x - 12}$ . Déterminer les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

**Exercice 12**

On considère les fonctions de référence  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $r$  définies par :

$$u(x) = ax + b, \quad v(x) = x^2, \quad w(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad r(x) = \sqrt{x}$$

Décomposer les fonctions suivantes à l'aide des fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $r$  :

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^2}, \quad g(x) = \left( \frac{1}{2x + 1} \right)^2 \quad \text{et} \quad h(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} + 3$$

Pour chacune de ces fonctions, on choisira les valeurs de  $a$  et de  $b$  qui conviennent.

**Exercice 13**

Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies par  $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$  et  $g(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$ .

1. Déterminer les domaines de définition des fonctions  $f$  et  $g$ .

2. Peut-on calculer les limites de  $f$  et  $g$  en 1 ? Justifier.

3. On pose  $N(x) = x^3 - 3x + 2$  et  $D(x) = x^2 - 4x + 3$ .

a. Calculer  $N(1)$  et  $D(1)$ .

b. Montrer qu'il existe trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $N(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$ .

c. Factoriser  $N(x)$  puis  $D(x)$ .

4. Simplifier l'expression de  $f(x)$  pour  $x \neq 1$  et en déduire sa limite lorsque  $x$  tend vers 1.

5. En utilisant l'expression conjuguée du numérateur, simplifier l'expression de  $g(x)$  pour  $x \neq 1$  et en déduire la limite de  $g(x)$  lorsque  $x$  tend vers 1.

**Exercice 14**

Soit  $h$  et  $k$  les fonctions définies par  $h(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x}$  et  $k(x) = \frac{3x}{x^2 + x}$ .

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions  $h$  et  $k$ .

2. Peut-on calculer les limites de  $h(x)$  et  $k(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0 ? Justifier.

3. Factoriser  $h(x)$  et  $k(x)$  pour  $x \neq 0$  et en déduire les limites de  $h(x)$  et  $k(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0.

**Exercice 15**

Pour chacune des affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

1. Si pour tout réel  $x > 0$ , on a  $f(x) \leq \frac{2}{x}$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
2. Si pour tout  $x > 0$ , on a  $2 + \frac{2}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{3}{x}$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .
3. Si pour tout  $x > 0$ , on a  $1 + \frac{3}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{3}{x}$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  avec  $l \in [1; 2]$ .
4. Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ , alors  $C_f$  ne coupe pas la droite d'équation  $y = a$ .

**Exercice 16**

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-4}{-x^2+x+2}$  ;
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-4}{-x^2+x+2}$  ;
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-x^2}{x-3}$  ;
4.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x-x^2}{x-3}$  ;
5.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2-4})$  ;
6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5+3x \sin x}{x^2+5}$ .

**Exercice 17**

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \cos\left(\frac{\pi+1}{x+2}\right)$ ,  $D_f = \mathbb{R}^+$  et en  $+\infty$ .
2.  $f(x) = \frac{\sin(7x)}{2x}$ ,  $D_f = \mathbb{R}^*$  et en 0.
3.  $f(x) = \frac{\sin(7x)}{\sin(2x)}$ ,  $D_f = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \setminus \{0\}$  et en 0.
4.  $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ ,  $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{9\}$  et en 9.
5.  $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$ ,  $D_f = \mathbb{R}$  et en 0.

**Exercice 18**

Déterminer les limites suivantes (on justifiera soigneusement) :

1.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$  ;
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{3x^2+5})$  ;
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - \sqrt{2x^2+3})$  ;
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{x^2-2x-2}$  ;
5.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)}{n\sqrt{n}}$  ;
6.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}$  ;
7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+7\sqrt{x+2}}{-3+x}$  ;
8.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$ .

### Exercice 19

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]-\infty; 0[$  par  $f(x) = x^3 - \cos x$ .

1. Démontrer que, pour tout  $x < 0$ ,  $f(x) \leq x^3 + 1$ .
2. En déduire la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

### Exercice 20

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5 - \frac{4}{x^2}}$  ;
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)^4$  ;
3.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{2-x}{x}}$  ;
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 9 - \frac{16}{x^2 + 4}}$  ;
5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 5}{4x + 1}}$  ;
6.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x+2}$ .

### Exercice 21

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ .

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
2. a. À quelle forme indéterminée la limite de  $f$  en  $+\infty$  conduit-elle ?  
 b. Démontrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = -\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ .  
 c. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

### Exercice 22

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{ax+b}{2x-1}$  où  $a$  et  $b$  sont deux réels.

1. Déterminer  $a$  et  $b$  tels que  $f(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .
2. Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de  $f$ .

### Exercice 23

Pour chacune des affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

1. Si pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \geq x^2$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
2. Si pour tout  $x > 0$ , on a  $f(x) \leq \frac{1}{x}$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
3. Si pour tout  $x > 0$ ,  $1 \leq f(x) \leq x$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ .

### Exercice 24

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x-1}$  et  $C_f$  sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout réel  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}$ .
2. Déterminer les limites en  $-\infty$  et  $+\infty$  de  $f(x) - (x+1)$ .
3. Quelle propriété peut-on déduire quant à  $C_f$  et la droite  $\Delta : y = x + 1$ .  
 Représenter ce résultat sur un graphique.

**Exercice 25**Déterminer les limites des fonctions  $f$  suivantes :

1.  $f(x) = e^{-x}$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  ;
2.  $f(x) = 3e^x + 3x - 4$  en  $-\infty$  ;
3.  $f(x) = e^x - x + 3$  en  $-\infty$  ;
4.  $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + 2}$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  ;
5.  $f(x) = (2x - 3)(1 - e^{-x})$  en  $+\infty$  ;
6.  $f(x) = xe^x$  en  $+\infty$  ;
7.  $f(x) = xe^{-x}$  en  $-\infty$  ;
8.  $f(x) = x + 1 + \frac{3}{e^x + 1}$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  ;
9.  $f(x) = 1 + 2x + xe^x$  en  $+\infty$  ;
10.  $f(x) = \frac{-2e^x}{1 + e^x}$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  .

**Exercice 26**Déterminer les limites en  $-\infty$  et  $+\infty$  des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = e^x + e^{-x}$  ;
2.  $f(x) = x + e^x$  ;
3.  $f(x) = \frac{2e^x}{1 + e^x}$  ;
4.  $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$  ;
5.  $f(x) = \frac{7}{e^x - 1}$  ;
6.  $f(x) = x^2 + 2 - e^x$  ;
7.  $f(x) = \frac{2e^x - x}{x^2}$  ;
8.  $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$  ;
9.  $f(x) = 3xe^{-x}$  .

**Exercice 27**

Déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-x}$  ;
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5}{e^x}$  ;
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}(x^2 + 2x - 5)$  ;
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2}{e^x}$  .

**Exercice 28**

Déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x}$  ;
2.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$  ;
3.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} e^{\sqrt{x+1}}$  ;
4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + e^x}$  ;
5.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}$  ;
6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x^2 + 5}$  ;
7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^{-x}}$  ;
8.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} e^{\frac{-2}{x-3}}$  ;
9.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} e^{\frac{-2}{x-3}}$  .

**Exercice 29**Déterminer les limites des fonctions  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

1.  $f(x) = \frac{e^{3x} - 1}{x}$  ;
2.  $f(x) = \frac{4x}{e^{2x} - 1}$  ;
3.  $f(x) = \frac{x+1}{x} e^{\frac{1}{x}}$  ;
4.  $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$  ;
5.  $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$  ;
6.  $f(x) = e^{-x^3}$  .

**Exercice 30**

Déterminer les limites des fonctions  $f$  à l'endroit indiqué.

1.  $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{5x}$  en 0 ;
2.  $f(x) = (e^x)^2 - e^{3x+4}$  en  $+\infty$  ;
3.  $f(x) = (x+1)e^{x+3}$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  ;
4.  $f(x) = \frac{e^{2x} + x^2}{x^2 + x - 3}$  en  $+\infty$  ;
5.  $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  ;
6.  $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$  en 0 ;
7.  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 1}$  en 1 ;
8.  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  en 0 ;
9.  $f(x) = (1 - 2x)e^{1-2x}$  en  $-\infty$  ;
10.  $f(x) = e^{-2x+3}$  en  $+\infty$  ;
11.  $f(x) = e^{\frac{2x+1}{x+3}}$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  ;
12.  $f(x) = (x^2 - x - 2)e^{2x}$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  .

**Exercice 31**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x - x$ .

1. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \geq 1$ . En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .
2. En faisant un changement de variable astucieux, démontrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

**Exercice 32**

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction  $p$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $p(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$ .

Le réel  $x$  représente le temps écoulé, en année, depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2010. Le nombre  $p(x)$  modélise la proportion d'individus équipés après  $x$  années.

1. Quel est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1<sup>er</sup> janvier 2000 ? On arrondira au centième près.
2. a. Déterminer le sens de variation de la fonction  $p$  sur  $[0; +\infty[$ .  
b. Calculer la limite de la fonction  $p$  en  $+\infty$ .  
c. Interpréter cette limite.

**Exercice 33**

On suppose connu le résultat suivant : pour tout réel  $x$ ,  $e^x > x$ .

1. Soit  $\phi$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $\phi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ .

Montrer que pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $\phi(x) \geq 1$ .

2. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .
3. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{2x}}$ .  
a. Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
b. Étudier les variations de la fonction  $f$ , puis dresser son tableau de variations sur  $]0; +\infty[$ .

**Problèmes****Problème 1** ...Étude classique...

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{2 \sin x - 3x}{x-2}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

**Problème 2** ...Asymptote oblique...

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x-1}$  et  $C_f$  sa courbe représentative.

1. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
2. Déterminer les limites de  $f$  en 1 à gauche et à droite.
3. Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $f(x) = ax + b - \frac{c}{x-1}$ .
4. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
5. Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x + 2$  est asymptote à  $C_f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
6. Tracer l'allure de  $C_f$ .

**Problème 3** ...Limites en vrac...

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 3x - 1 - \frac{x}{x^2 + 1} \right)$ .
2. Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{2 - \cos x}$ .
3. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$ .

**Problème 4** ...Une histoire d'asymptotes...

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus [-2; 0]$  par  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x}$  et  $C_f$  sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
2. Déterminer les limites de  $f$  en  $-2$  et  $0$ .
3. Interpréter graphiquement les résultats des deux questions précédentes.
4. Déterminer  $f'(x)$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .
5. Tracer dans un repère les asymptotes de  $C_f$  et l'allure de  $C_f$ .

**Problème 5** ...Position relative...

Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $] -1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x+1}$  et  $g(x) = (x-2)^2$ .

1. À l'aide de la calculatrice, construire les courbes  $C_f$  et  $C_g$  représentatives des fonctions  $f$  et  $g$ . Quelles remarques sur ces courbes peut-on faire pour des grandes valeurs de  $x$  ?
2. a. Démontrer que, pour tout  $x \in ] -1; +\infty[$ ,  $g(x) - f(x) = \frac{4}{x+1}$ .  
b. Déterminer la position relative des courbes de  $C_f$  et  $C_g$  sur  $] -1; +\infty[$ .  
c. Calculer la limite de  $g(x) - f(x)$  en  $+\infty$ .