

Chapitre 3

Modélisation quadratique

I. Fonctions polynômes du second degré

I.1 Définitions

Définition 1

On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme**) toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$. Cette expression est appelée **forme développée** de f .

Exemples

- $f(x) = x^2 + 2x - 1$ avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = -1$.
- $h(x) = (x + 2)^2 - 3$ est un trinôme car, en développant, on obtient :
 $h(x) = x^2 + 4x + 4 - 3 = x^2 + 4x + 1$ avec $a = 1$, $b = 4$ et $c = 1$.

Définition 2

Soit f la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On dit que la courbe représentative de cette fonction est une **parabole**.

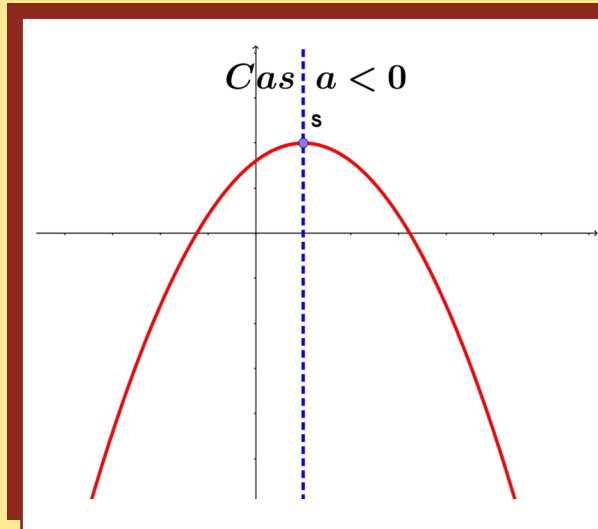
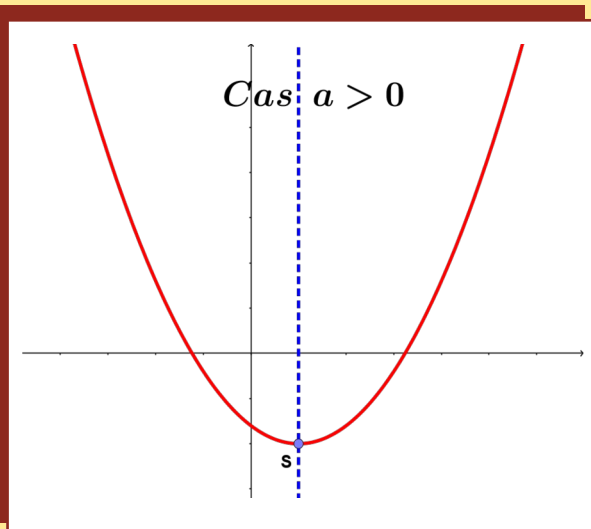
Une parabole a une forme de « U » (« tournée vers le haut ») lorsque a est positif.

A l'inverse, si a est négatif, la parabole a une forme de « pont » (« tournée vers le bas »).

Dans les deux cas, la parabole possède comme **axe de symétrie** la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

On appelle généralement **S le sommet** d'une parabole.

S a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.



Méthode : Démontrer qu'une fonction polynôme de degré 2 admet un extremum

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

a. Démontrer que pour tout x réel, $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$.

b. En déduire que f admet un minimum dont on précisera la valeur.

a. En développant la 2^e expression, on obtient :

$$(2(x-3))^2 + 5 = 2(x^2 - 6x + 9) + 5 = 2x^2 - 12x + 18 + 5 = 2x^2 - 12x + 23 = f(x).$$

b. On regarde le signe de a : $a = 2 > 0$.

La parabole est « tournée vers le haut », donc f admet un minimum.

Or la deuxième expression correspond à la forme canonique, d'où on peut lire la valeur du minimum qui est 5, atteint pour $x = 3$.

I.2 Sens de variations**Propriété 3**

Soit f une fonction polynomiale du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

• Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Elle admet comme minimum β en $x = \alpha$.

• Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Elle admet comme maximum β en $x = \alpha$.

Cas $a > 0$

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f(x)			
	$\beta = f(\alpha)$		

Cas $a < 0$

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f(x)			
	$\beta = f(\alpha)$		

La courbe représentative de f dans un repère orthonormé admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$ et pour sommet le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$.

Méthode : Établir les variations d'une fonction du second degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.

- Calculer les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction f .
- La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum. Justifier.
- Construire le tableau de variations de f , puis tracer sa courbe représentative dans un repère.

a. On calcule les coordonnées du sommet S :

On a $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-1)} = -\frac{4}{-2} = 2$ et $\beta = f(\alpha) = f(2) = -2^2 + 4 \times 2 = -4 + 8 = 4$.

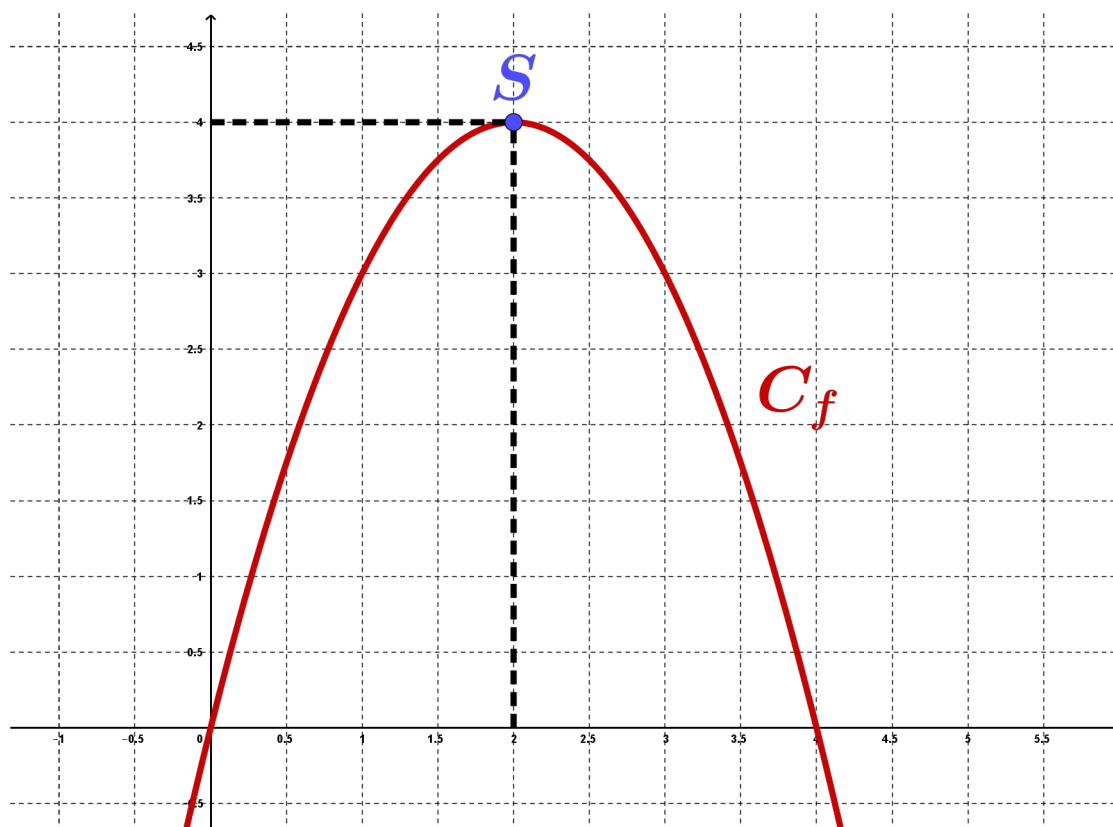
Donc $S(2; 4)$.

b. On regarde le signe de a : $a = -1 < 0$.

La parabole est « tournée vers le bas », donc f admet un maximum. Ce maximum est 4.

c. Tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		4	



I.3 Fonctions particulières $x \rightarrow ax^2$ et $x \rightarrow ax^2 + c$

Influence du coefficient a ($a > 0$)	Passage de $a > 0$ à $a < 0$	Influence du coefficient c
L'axe de symétrie des différentes courbes est la droite d'équation $x=0$ Cas : $a > 1$ Plus a est grand et plus la courbe « se contracte » Cas : $0 < a < 1$ Plus a est proche de zéro et plus la courbe « s'écarte »	La courbe représentative de la fonction $x \rightarrow -ax^2$ est symétrique à celle de la fonction $x \rightarrow ax^2$ par rapport à l'axe des abscisses	La courbe représentative de la fonction $x \rightarrow ax^2 + c$ s'obtient en effectuant une translation de vecteur $c\vec{j}$ à partir de la courbe représentative de la fonction $x \rightarrow ax^2$

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8$.

Sa représentation graphique est une parabole d'axe de symétrie l'axe des ordonnées.

De plus, on a $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \times 2} = 0$ et $f(0) = 2 \times 0^2 - 8 = 0 - 8 = -8$.

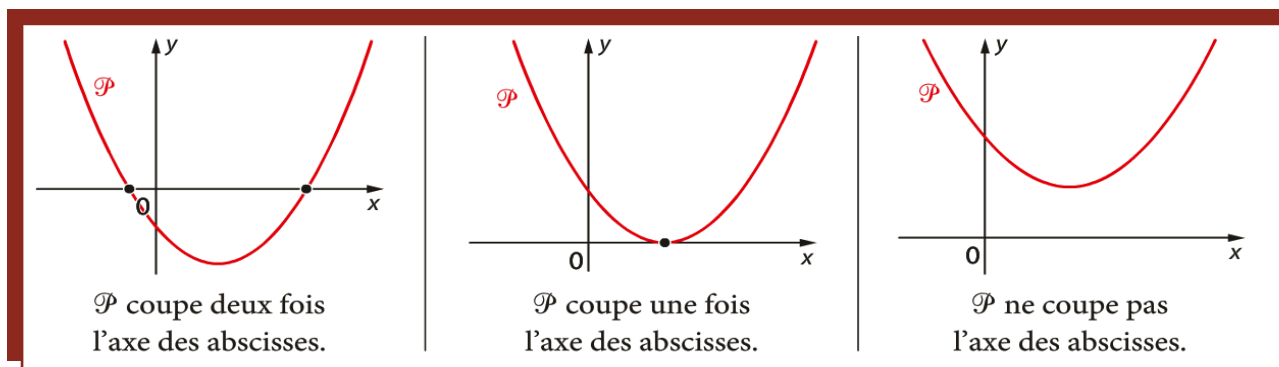
Son sommet a donc pour coordonnées $(0; -8)$.

II. Équation du second degré**II.1 Approche graphique**

Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \neq 0$, c'est trouver, s'il en existe, tous les nombres x qui vérifient cette égalité. De tels nombres sont appelés **solutions de l'équation** ou **racines** du trinôme. Pour trouver le nombre de solutions de cette équation, on peut s'aider de la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Dans les trois exemples ci-dessous, on peut conjecturer que l'équation admet respectivement deux solutions, une solution et aucune solution.

II.2 Vocabulaire



Définition 4

Une **équation du second degré**, d'inconnue x , est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a , b et c sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.

Une solution de cette équation est appelée **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemples

- L'équation du second degré $x^2 - 4 = 0$ possède deux racines : 2 et -2 . En effet, on a :
 $2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$ et $(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$.
- L'équation du second degré $x^2 - 4x + 3 = 0$ possède deux racines : 1 et 3. En effet, on a :
 $1^2 - 4 \times 1 + 3 = 0$ et $3^2 - 4 \times 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$.

III. Fonctions polynômes du second degré admettant deux racines

III.1 Forme factorisée

Propriété 5

Soit f une fonction du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. On a la factorisation suivante :

- Si f admet **deux racines** x_1 et x_2 , alors on a pour tout réel x , $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si f admet **une racine double** x_0 , alors on a pour tout réel x , $f(x) = a(x - x_0)^2$.

Remarque

Si $x_1 = x_2$, alors on dit que f admet une racine double que l'on note x_0 .

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 9x - 30$.

Les nombres -2 et 5 sont les racines de f :

$$f(-2) = 3 \times (-2)^2 - 9 \times (-2) - 30 = 12 + 18 - 30 = 0 \text{ et } f(5) = 3 \times 5^2 - 9 \times 5 - 30 = 75 - 45 - 30 = 0.$$

De plus, d'après l'expression développée de f , on en déduit que $a = 3$.

Ainsi, la fonction f se factorise et on obtient $f(x) = 3(x - (-2))(x - 5) = 3(x + 2)(x - 5)$.

Propriété 6

La représentation graphique des fonctions de la forme $x \rightarrow a(x-x_1)(x-x_2)$ est une parabole d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{x_1+x_2}{2}$.

L'abscisse du sommet de la parabole est alors $\alpha = \frac{x_1+x_2}{2}$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-7)(x+3)$.

On a $x_1 = 7$ et $x_2 = -3$. D'où $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Donc la représentation graphique de f est une parabole d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 2$. Son sommet a donc pour abscisse $\alpha = 2$.

III.2 Signe d'une fonction polynôme du second degré

Propriété 7

Soit la fonction polynomiale $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

• Si f admet deux racines x_1 et x_2 , alors $f(x)$ s'annule pour $x = x_1$ et $x = x_2$ (on suppose que $x_1 < x_2$) et alors :

- le signe de $f(x)$ est **du signe de a** pour x extérieur à l'intervalle des racines ;
- le signe de $f(x)$ est **du signe contraire de celui de a** si x est compris entre les racines.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

• Si f admet une racine double, alors $f(x)$ s'annule pour $x = x_0$: **son signe est celui de a** pour tous les réels $x \neq x_0$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a

Exemple

• Donner le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 7x + 10$.

Les nombres 2 et 5 sont racines de f :

$$f(2) = 2^2 - 7 \times 2 + 10 = 4 - 14 + 10 = 0 \text{ et } f(5) = 5^2 - 7 \times 5 + 10 = 25 - 35 + 10 = 0.$$

De plus, $a = 1 > 0$.

On en déduit alors le tableaux de signes de la fonction f :

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+