

Chapitre 3

Limites de fonctions

I. Limites en l'infini

I.1 Limite infinie

Définition 1

- Une fonction f admet une limite infinie égale à $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

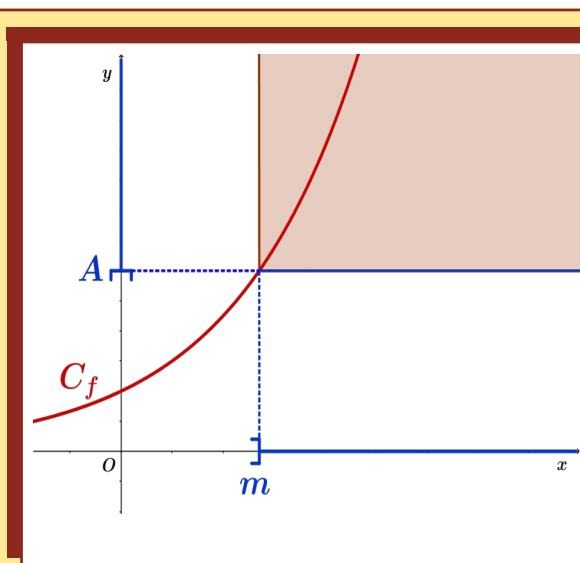
Autrement dit, pour tout réel A , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) > A$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Une fonction f admet une limite infinie égale à $-\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

Autrement dit, pour tout réel A , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) < A$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.



Remarques

- Cette définition traduit l'idée que les valeurs $f(x)$ arrivent, pour les grandes valeurs de x , à dépasser n'importe quel nombre A aussi grand soit-il.

On dit aussi que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand x tend vers $+\infty$.

- Contrairement aux suites, on peut aussi s'intéresser au comportement d'une fonction en $-\infty$.

On définit de manière analogue ces limites infinies en $-\infty$: « pour x assez grand » est remplacé par « pour x négatif et assez grand en valeur absolue ».

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Prouvons que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, c'est-à-dire que pour tout nombre A strictement positif,

$f(x) \in]A; +\infty[$ dès que x est inférieur à un certain nombre m .

La condition $f(x) > A$ s'écrit $x^2 > A$. Ceci équivaut à $x < -\sqrt{A}$ ou $x > \sqrt{A}$.

On peut donc prendre $m = -\sqrt{A}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Propriété 2

On a pour tout entier naturel n non nul :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ si n est impair

Démonstration

Démontrons la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = e^x - 1$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de f'		-	+
f		$\searrow$	$\nearrow$

La fonction f admet comme minimum le réel 1 : Pour tout réel x , $f(x) \geq 1 > 0$.

On en déduit alors que pour tout réel x , $e^x > x$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, donc par comparaison $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

I.2 Limite finie

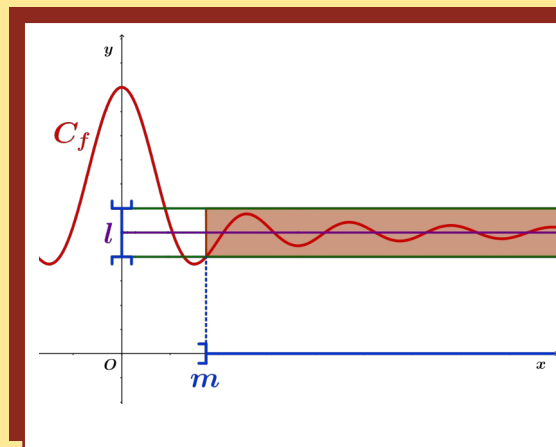
Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et l un réel.

La fonction f admet une limite finie égale à l si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

Autrement dit, pour tout intervalle J contenant l , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) \in J$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.



Remarques

• Cette définition traduit l'accumulation des valeurs $f(x)$ autour du réel l .

On dit aussi que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$.

• On définit de manière analogue une limite finie l en $-\infty$: « pour x assez grand » est remplacé par « pour x négatif et assez grand en valeur absolue ». On écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Prouvons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, c'est-à-dire que pour tout nombre A strictement positif,

$f(x) \in]-A; A[$ dès que x est supérieur à un certain réel m .

Comme $f(x) > 0$, la condition $f(x) \in]-A; A[$ se traduit par $f(x) \in]0; A[$.

Ceci équivaut à $\frac{1}{x^2} < A$, c'est-à-dire $x^2 > \frac{1}{A}$ et donc $x > \frac{1}{\sqrt{A}}$. Ainsi $m = \frac{1}{\sqrt{A}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Définition 4

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$, alors la droite d'équation $y = l$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
par $f(x) = \frac{x}{x-3}$.

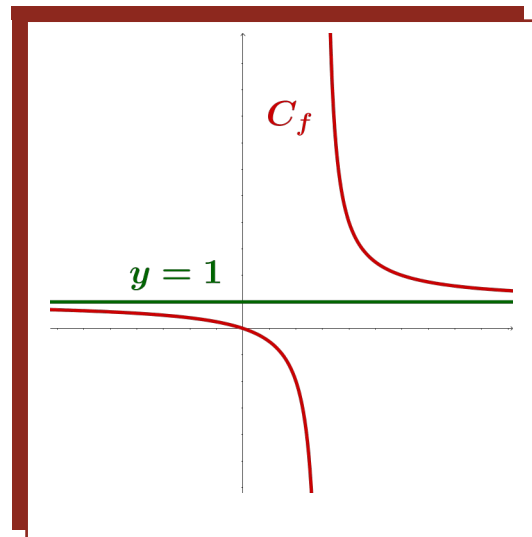
On a $f(x) = \frac{x}{x\left(1 - \frac{3}{x}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{x}}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$, par somme et quotient,

alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{3}{x}} = 1$.

Donc la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ (il en est de même en $-\infty$).

Cette asymptote horizontale a pour équation $y = 1$.



Propriété 5

On a pour tout réel k et tout entier naturel n non nul :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} k = \lim_{x \rightarrow -\infty} k = k$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Démonstration

Démontrons la limite de la fonction exponentielle en $-\infty$.

Procédons par changement de variable. Posons $X = -x$. On a alors $e^x = e^{-X}$.

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$. Par composition, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Remarque

Les courbes représentatives des fonctions de la forme $x \rightarrow \frac{1}{x^n}$ admettent l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$.

II. Limite en un point**II.1 Limite infinie****Définition 6**

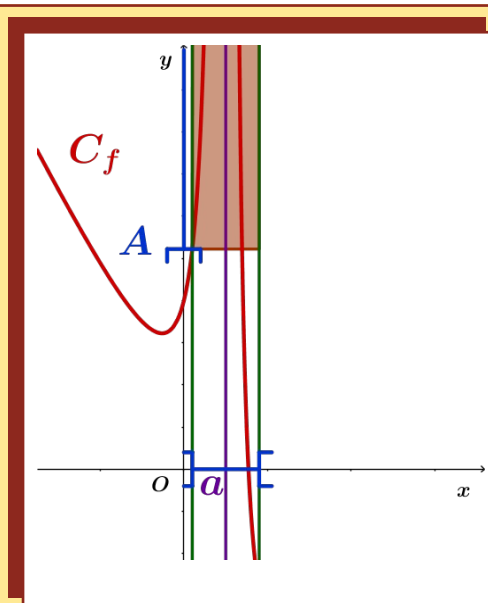
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel étant une borne de I .

- La fonction f admet une limite infinie égale à $+\infty$ en a si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

Autrement dit, pour tout réel A , il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que si $x \in J \cap I$, alors $f(x) > A$.
On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

- La fonction f admet une limite infinie égale à $-\infty$ en a si tout intervalle ouvert de la forme $] -\infty; A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

Autrement dit, pour tout réel A , il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que si $x \in J \cap I$, alors $f(x) < A$.
On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

**Remarque**

Cette définition traduit l'idée que les valeurs $f(x)$ arrivent, pour des valeurs de x de plus en plus proche de a , à dépasser n'importe quel nombre A aussi grand soit-il.

On dit aussi que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand x tend vers a .

Définition 7

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f en a .

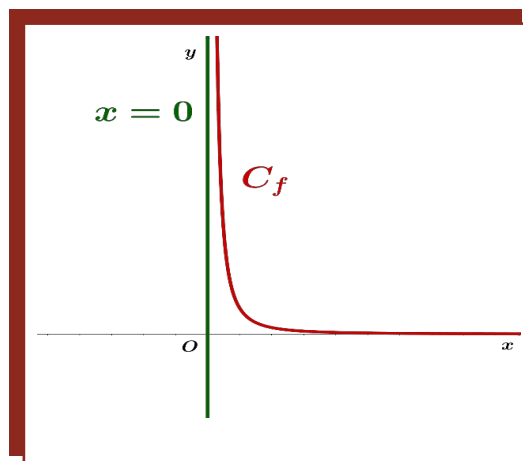
Exemple

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$

par $f(x) = \frac{1}{x}$.

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$.

Donc la courbe représentative de f admet une asymptote verticale en 0.



II.2 Limite à gauche, limite à droite

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$

par $f(x) = \frac{1}{x}$ (en rouge), la fonction g

définie sur $] -\infty; 0[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ (en bleue)

et la fonction inverse h définie sur $\mathbb{R}^*$.

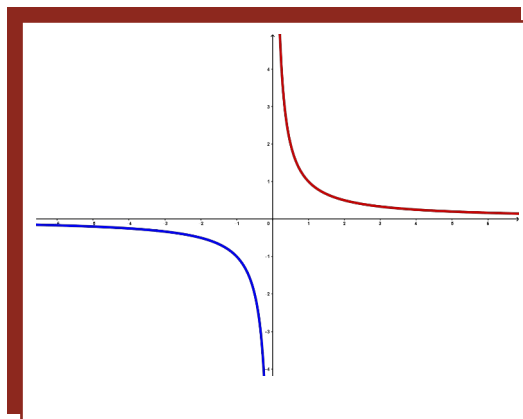
Graphiquement, on observe que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.

La fonction h ne semble pas admettre de limite en 0.

Par contre :

- Si $x > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. On écrira alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$.
- Si $x < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$. On écrira alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty$.



Définition 8

- On dit que f admet une **limite à droite en a** lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x > a$. On note cette limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- On dit que f admet une **limite à gauche en a** lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x < a$. On note cette limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

Remarque

On ne distingue les limites de f à droite et à gauche en a que lorsque celles-ci sont différentes.

Définition 9

Soit a un réel et f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

La fonction f a une limite infinie en a si f possède une limite à gauche en a , une limite à droite en a (infinies) et que **ces limites sont égales**. On a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Remarques

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$.
- Pour une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f si au moins l'une des limites $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existe et est infinie.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

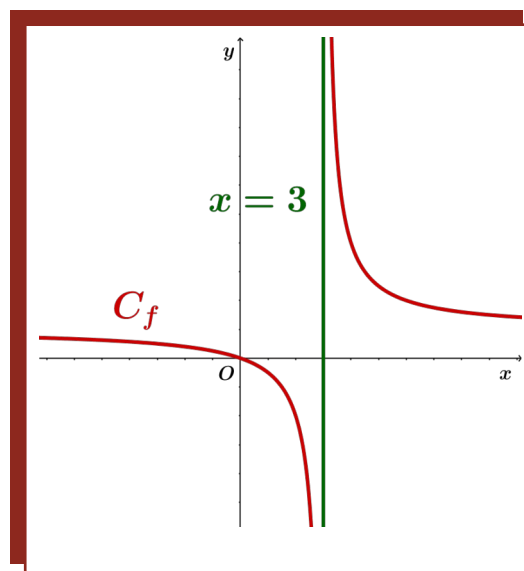
par $f(x) = \frac{x}{x-3}$.

On a $\lim_{x \rightarrow 3^+} x-3 = 0^+$, alors $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$.

Et $\lim_{x \rightarrow 3^-} x-3 = 0^-$, alors $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$.

Donc la courbe représentative de f admet une asymptote verticale en 3.

Cependant, f n'admet pas de limite en 3.

**II.3 Limite finie****Définition 10**

Une fonction f admet une limite finie l en a lorsque $f(x)$ est aussi proche de l que voulu pour x suffisamment proche de a . On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Exemple

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 1$.

On a $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 1) = 2 \times 2^2 - 1 = 7$.

- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par $g(x) = \frac{4x+1}{x-5}$.

On a $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x+1}{x-5} = \frac{4 \times (-1) + 1}{-1 - 5} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$.

Remarque

Comme pour les suites, une limite de fonction, lorsqu'elle existe, est unique.

III. Opérations sur les limites

III.1 Limites d'une somme de fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemple

Soit la fonction f définie par sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 4x - 5 + \frac{1}{x}$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x - 5) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc, par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

III.2 Limites d'un produit de fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-x + 1)e^x$.

Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 1) = -\infty$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Ainsi, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

III.3 Limites d'un quotient de fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l' et $l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0 et $g(x) > 0$	0 et $g(x) > 0$	0 et $g(x) < 0$	0 et $g(x) < 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -\frac{2}{x^2}$. Déterminons toutes les limites aux bornes de son ensemble de définition.

- On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$. Par quotient, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$. Par quotient, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} -2 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0^+$. Par quotient, on a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.
- On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} -2 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+$. Par quotient, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

IV. Théorèmes sur les limites**IV.1 Limites en l'infini d'une fonction polynomiale****Théorème 11 (hors programme)**

La limite en l'infini d'une fonction polynomiale est égale à la **limite en l'infini de son terme de plus haut degré**.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Remarques

Le calcul des limites en l'infini d'une fonction polynomiale conduit souvent à la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

En factorisant par ax^n , on obtient le produit de ax^n et d'un facteur dont la limite en l'infini est égale à 1. La limite en l'infini de $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ sera donc égale à celle de ax^n .

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 2x + 3$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^2 = +\infty$.

IV.2 Limites en l'infini d'une fonction polynomiale**Théorème 12 (hors programme)**

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la **limite en l'infini du quotient du terme de plus haut degré du numérateur par le terme de plus haut degré du dénominateur**.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Remarque

Pour les fonctions définies comme quotient de deux fonctions polynomiales, le calcul des limites en l'infini conduit le plus souvent à la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Le théorème précédent permet de contourner ce problème.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x^5 - 2}{7x^4 + 5}$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5}{7x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{7}x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5}{7x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{7}x = -\infty$.

IV.3 Limite d'une composée de fonctions

Toutes les fonctions ne peuvent pas être écrites comme somme, produit ou quotient de fonctions usuelles. On utilise alors l'opération nommée la **composition**.

Définition 13

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I tel que $g(x) \in J$ pour tout $x \in I$. On définit la composée de g par f comme la fonction définie sur I par : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Remarque

On a le schéma suivant :

$$f \circ g : \begin{array}{ccccc} I & \rightarrow & J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \xrightarrow{g} & g(x) & \xrightarrow{f} & f(g(x)) \end{array}$$

Exemple

Soit la fonction h définie sur $[1; +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x-1}$. Pour calculer $h(x)$, on calcule d'abord $x-1$, puis la racine carrée de ce réel. La fonction h est l'enchaînement de deux fonctions : La fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = x-1$ suivi de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(X) = \sqrt{X}$. On a $h(x) = \sqrt{x-1} = f(x-1) = f(g(x))$.

Théorème 14 (hors programme)

Soit les fonctions f et g et trois nombres a , b et c désignant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} f(X) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{1}{x^2}\right) = 4$ et $\lim_{X \rightarrow 4} \sqrt{X} = 2$.

Par composition de limites, on a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

V. Limites et comparaison

V.1 Limite d'une fonction par minoration ou majoration

Théorème 15

Soit les fonctions f et g définies sur un intervalle ouvert I et a un réel tel que a appartient à I ou a est une borne de I .

- Si pour tout réel x de I , $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.
- Si pour tout réel x de I , $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Démonstration

- Soit I un intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ avec A un réel.

Comme $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, alors par définition, l'intervalle I contient toutes les valeurs $g(x)$ pour x assez grand. De plus, $f(x) \geq g(x)$. Alors pour tout x de I , l'intervalle I contient aussi toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. Donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

- On utilise un raisonnement analogue.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos^2(x)$. Pour tout réel x , $\cos^2(x) \geq 0$.
Donc pour tout réel x , $f(x) \geq x$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$. Par comparaison, on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

V.2 Théorème d'encadrement

Théorème 16

Soit les fonctions f , g et h définies sur un intervalle ouvert I et l et a des réels tel que a appartient à I ou a est une borne de I .

Si pour tout x de I , $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Remarques

- Ce théorème est aussi appelé **théorème des gendarmes**.
- Ce théorème assure d'une part l'existence de la limite de f en a et d'autre part que celle-ci est égale à l .

Exemple

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Pour tout réel $x > 0$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

D'où $-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.