Chapitre 3

Généralités sur les fonctions

I. Définitions

Définition 1

Soit D un ensemble de nombres réels. Définir une fonction f sur l'ensemble D consiste à associer, à chaque réel x de D, un **unique nombre** réel y.

Définition 2

Soit une fonction f définie sur un ensemble D.
- D s'appelle l'**ensemble de définition** de la fonction f.
- y s'appelle l'**image** de x par la fonction f et se note $f(x)$.
- x est un **antécédent** de y par la fonction f.

Remarques

- D peut être l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, ou être constitué d'une ou plusieurs parties de $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathrm{D}$. **L'image** du nombre x par la fonction f est unique et se note $f(x)$. $f(x)$ se lit « f de x ».
- Si y est l'image de x par f, alors on a l'égalité $y=f(x)$ et x est **un antécédent** de y par la fonction f.
- Pour indiquer que f est une fonction de D dans $\mathbb{R}$, on peut également utiliser la notation suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathrm{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Attention!

f est une fonction alors que $f(x)$ est un nombre.

Remarques

- $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. On le note également $[0;+\infty[$.
- $\mathbb{R}^-$ désigne l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls. On le note également $]-\infty;0]$.
- $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ désigne l'ensemble des réels non nuls. On le note aussi $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

II. Différentes façons de définir une fonction

Définition 3

Soit f une fonction, D son ensemble de définition et $x \in \mathrm{D}$.
L'**expression algébrique** de la fonction f donne directement $f(x)$ en fonction de la variable x.

Exemple

La fonction f associe à un nombre réel x quelconque le nombre $f(x)=2x^2-3$.
• L'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$.
• On peut écrire, dans ce cas :

$$f : \begin{array}{lcl} D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2-3 \end{array}$$

• Pour calculer, par exemple, l'image de -5 par la fonction f, on remplace x par -5 dans l'expression de $f(x)$. On a donc $f(-5)=2\times(-5)^2-3=2\times25-3=50-3=47$.

Définition 4

Soit f une fonction, D son ensemble de définition et $x\in D$.
Un **tableau de valeurs** de la fonction f donne, sur la première ligne (ou colonne), différentes valeurs de la variable x et, en vis-à-vis sur la deuxième ligne (ou colonne), les images $f(x)$ qui leur sont associées.

Exemple

On considère le tableau de valeurs suivant :

Antécédent x	-4	-1	0	2	3
Image $f(x)$	5	4	1	2	4

• Le nombre 0 a pour image 1 par la fonction f.
• $f(-1)=4$ et $f(3)=4$. -1 et 3 sont des antécédents de 4 par la fonction f.

Définition 5

La **courbe représentative** de la fonction f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x;f(x))$ (ou $(x;y)$) où x parcourt le domaine de définition D de la fonction f.
Elle est souvent notée C_f.
L'**équation de cette courbe représentative** est $y=f(x)$.

Propriété 6

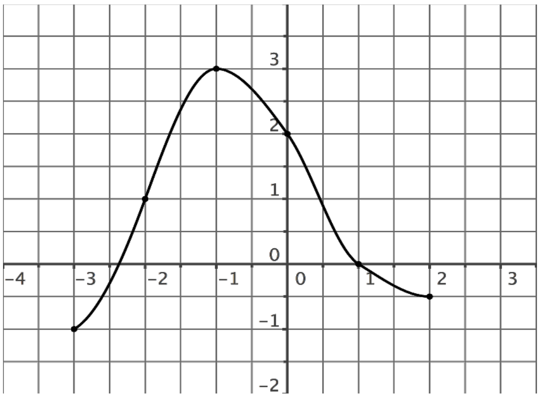
Un point M de coordonnées $(x;f(x))$ appartient à la courbe représentative C_f d'une fonction si et seulement si x appartient à D et $y=f(x)$.

Méthode algébrique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-5$.
• Déterminer une image
L'image de 7 par la fonction f est $f(7)=3\times7-5=21-5=16$.
• Déterminer un antécédent
L'antécédent de 4 par la fonction f est tel que $f(x)=4$.
On a $f(x)=4 \Leftrightarrow 3x-5=4 \Leftrightarrow 3x=9 \Leftrightarrow x=3$. Ainsi l'antécédent de 4 par la fonction f est 3.
• Déterminer si un point appartient à une courbe
Le point $A(1;-2)$ appartient à la courbe C_f représentative de f si et seulement si $f(1)=-2$.
On a $f(1)=3\times1-5=3-5=-2$. Ainsi $A\in C_f$.

Exemple

On considère la courbe ci-dessous représentant une fonction f .



D'après cette courbe, on peut dire que :

• L'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle $[-3;2]$.
• Le nombre -3 a pour image -1 par f ce qui s'écrit $f(-3)=-1$.
• Le nombre 1 a pour antécédents les nombres -2 et $0,5$.

III. Résolution graphique d'équation et d'inéquation

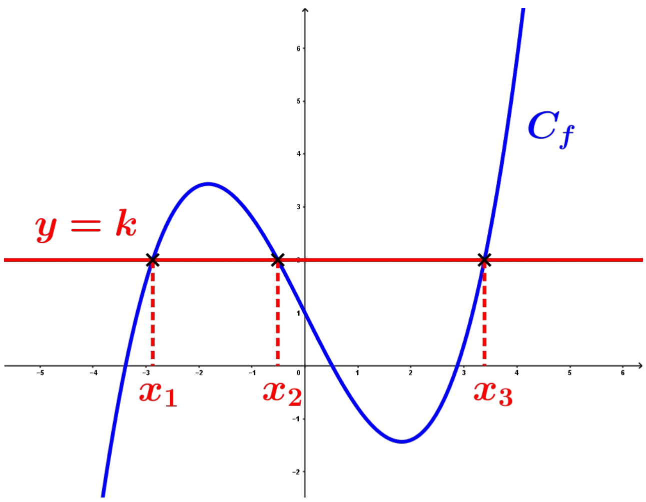
III.1 Résolution d'équation du type $f(x)=k$

Définition 7

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et k un réel fixé.
Résoudre l'équation $f(x)=k$ consiste à trouver **tous les réels x de D qui ont pour image k par la fonction f** . Ceci revient à déterminer l'**ensemble des antécédents de k par f** .

Propriété 8

Graphiquement, les solutions de $f(x)=k$ sont les **abscisses de tous les points de C_f ayant pour ordonnées k** . On détermine en fait l'ensemble des abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite d'équation $y=k$.



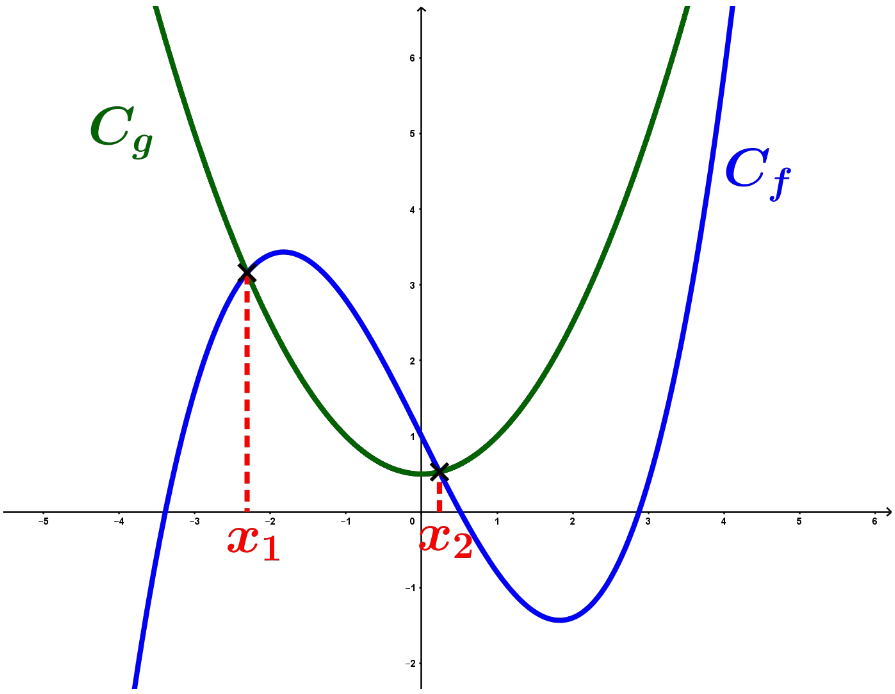
IV.2 Résolution d'équation du type $f(x)=g(x)$

Définition 9

Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble D .
Résoudre $f(x)=g(x)$ consiste à déterminer **tous les réels x de D qui ont la même image par f et g** .

Propriété 10

Graphiquement, les solutions de $f(x)=g(x)$ sont les **abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de f et g** .



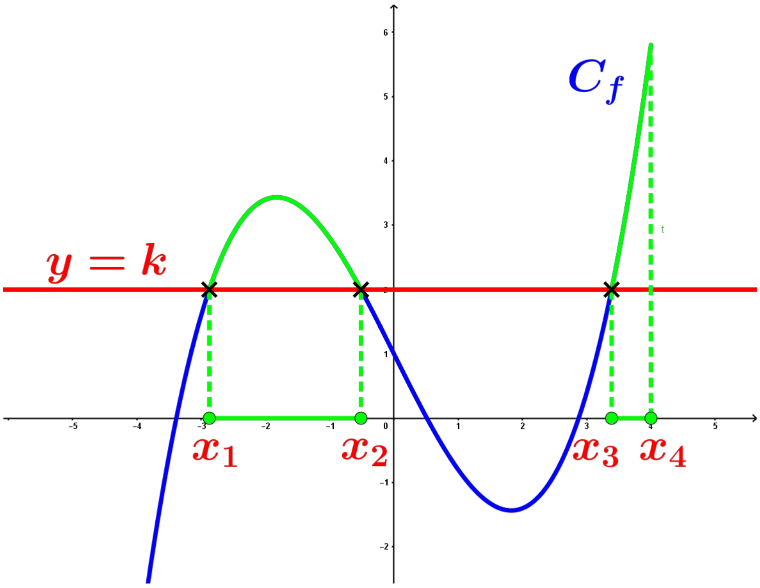
III.3 Résolution d'inéquation

Définition 11

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et k un réel fixé.
Résoudre l'équation $f(x)\geqslant k$ consiste à trouver **tous les réels x de D qui ont une image supérieure ou égale à k par la fonction f** .

Propriété 12

Graphiquement, les solutions de $f(x)\geqslant k$ sont les **abscisses de tous les points de C_f ayant une ordonnée supérieure ou égale à k** . On détermine en fait l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f situés au dessus de la droite d'équation $y=k$.

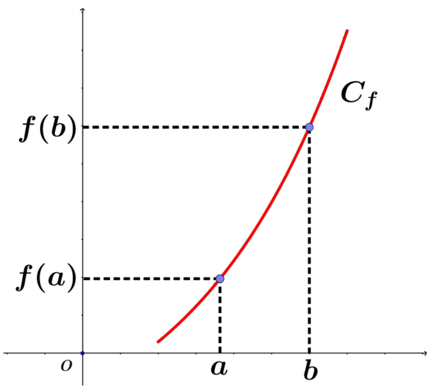


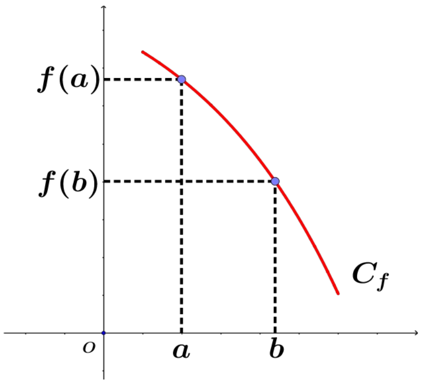
IV. Variations d'une fonction

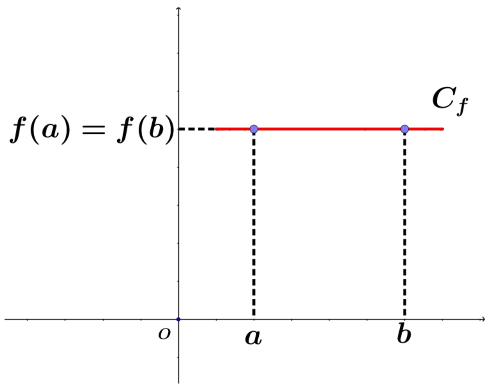
IV.1 Sens de variation

Définition 13

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- Dire que f est **croissante** sur I (respectivement **strictement croissante** sur I) signifie que, pour tous réels a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$ (respectivement si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$).
- Dire que f est **décroissante** sur I (respectivement **strictement décroissante** sur I) signifie que, pour tous réels a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$ (respectivement si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$).
- Dire que f est **constante** sur I signifie que, pour tous réels a et b de I, $f(a) = f(b)$.







Définition 14

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Dire que f est **monotone** sur I signifie que f est croissante sur I ou décroissante sur I.

IV.2 Tableau de variations

Définition 15

Pour représenter les variations d'une fonction f, on utilise un tableau avec des flèches représentant la monotonie sur des intervalles les plus grands possibles.
Il fait apparaître les intervalles sur lesquels la fonction est **croissante par une flèche montante** et ceux sur lesquels la fonction est **décroissante par une flèche descendante**. De plus, si on les connaît, on écrit les **images au bout des flèches**.
L'ensemble forme le **tableau de variations** de la fonction f.

Exemple

Pour une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;3,5]$, croissante sur $[-3;-1]$, décroissante sur $[-1;1]$ puis croissante sur $[1;3,5]$, le tableau de variations est le suivant :

x	-3		-1		1		$3,5$
$f(x)$	$-2,3$	↗	1	↘	$0,4$	↗	$6,1$

Remarque

Dans un tableau de variations, il est convenu que les flèches obliques indiquent que la fonction est strictement monotone.

IV.3 Extremum d'une fonction

Définition 16

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I.
• On dit que le réel M est le **maximum** de f sur I, **atteint** en a, si $f(a)=\mathrm{M}$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x)\leqslant \mathrm{M}$.
• On dit que le réel m est le **minimum** de f sur I, **atteint** en a, si $f(a)=m$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x)\geqslant m$.
• Un **extremum** de f sur I est **un maximum ou un minimum** de f sur I.
• On dit que le réel L est un **maximum** (respectivement **minimum**) **local** de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I, tel que L est le **maximum** (respectivement **minimum**) de f sur J.

Remarques

• Les pluriels de "minimum", "maximum" et "extremum" sont "minima", "maxima" et "extrema".
• On dit que $f(a)$ est le maximum (ou le minimum) de f sur I atteint pour $x=a$.
• On différencie maximum **global** et **local :**
Un maximum **global** correspond à la valeur la plus grande sur tout l'ensemble de définition.
Un maximum **local** correspond à la valeur la plus grande sur une partie de l'ensemble de définition.
Reprenons l'exemple précédent. Il y a deux maximums qui sont 1 et $6,1$. 1 est un maximum local alors que $6,1$ est un maximum global.

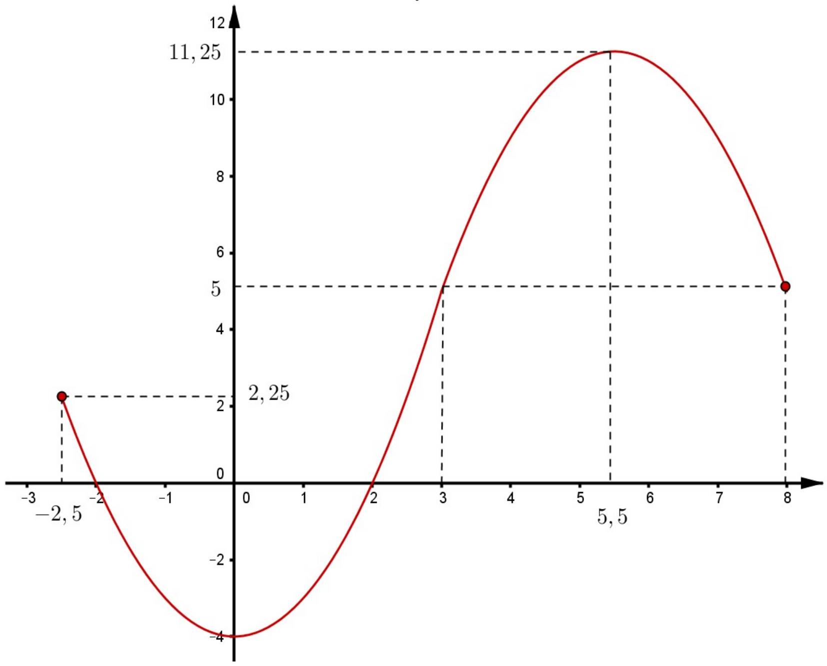
V. Étude du signe d'une fonction

Définition 17

Étudier le signe d'une fonction ou d'une expression $f(x)$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est positif, nul ou négatif. Le signe est souvent présenté sous la forme d'un **tableau de signes**.

Exemples

• Soit f une fonction définie sur $[-2{,}5\,;8]$ et C_f sa courbe représentative donnée ci-dessous :



La fonction f est :

- nulle si $x=-2$ ou $x=2$;
- positive si $x\in[-2{,}5;-2]$;
- négative si $x\in[-2;2]$;
- positive si $x\in[2;8]$.

On présente les résultats dans le tableau de signes suivant :

x	$-2{,}5$		-2		2		8
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• Soit g la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2$. La fonction g est toujours positive et elle s'annule seulement pour $x=0$. On en déduit son tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

Remarque

Le tableau de signe d'une fonction comporte deux lignes :
• Sur la première ligne, on indique les éléments du domaine de définition de la fonction et les éventuelles valeurs de x pour lesquelles la fonction s'annule.
• Sur la deuxième ligne, on crée des cases dans lesquelles on indique le signe de la fonction ainsi que les zéros en dessous des valeurs de x pour lesquelles la fonction s'annule.

VI. Fonctions de référence

Définition 18

Une **fonction de référence** est une fonction simple qui permet l'étude d'une famille plus large de fonctions.

VI.1 Fonctions affines

Définition 19

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$, où a et b sont deux nombres réels.

Remarques

• Lorsque $b=0$, la fonction f définie par $f(x)=ax$ est une fonction linéaire.
• Lorsque $a=0$, la fonction f définie par $f(x)=b$ est une fonction constante.

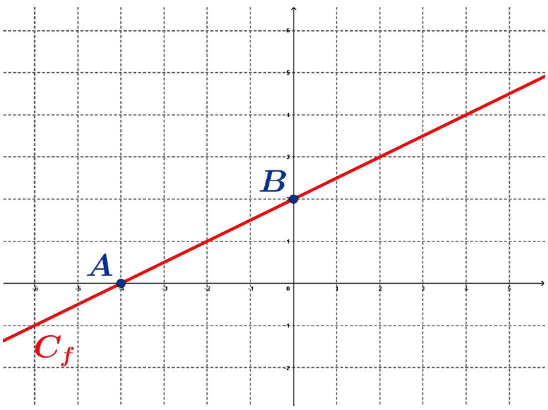
Exemples

• La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x+6$ est une fonction affine avec $a=-1$ et $b=6$.
• La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-\frac{2}{7}x$ est une fonction linéaire avec $a=-\frac{2}{7}$ et $b=0$.
• La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=3$ est une fonction constante avec $a=0$ et $b=3$.

Propriété 20

La représentation graphique d'une fonction affine f est une droite. Le réel a s'appelle **coefficient directeur** de la droite et b l'**ordonnée à l'origine**.

Représentation graphique



Remarques

• Lorsque $b=0$, la droite passe par l'origine du repère.
• Lorsque $a=0$, la droite est parallèle à l'axe des abscisses.
• La droite représentative d'une fonction affine passe par les points $A\left(-\frac{b}{a};0\right)$ (à condition que $a\neq 0$) et $B(0;b)$.

Théorème 21

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$.
• Si $a>0$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le haut".
• Si $a<0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le bas".
• Si $a=0$, alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est parallèle à l'axe des abscisses.

Propriété 22

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$. On a alors, quels que soient les nombres réels x_1 et x_2 distincts l'un de l'autre :

$$a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Remarque

Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points distincts de la droite représentant une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$. Alors on a $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.
Cette formule est identique à celle de la propriété 4 car le point A a pour coordonnées $(x_A;y_A)=(x_A;f(x_A))$.

VI.2 Fonction carrée

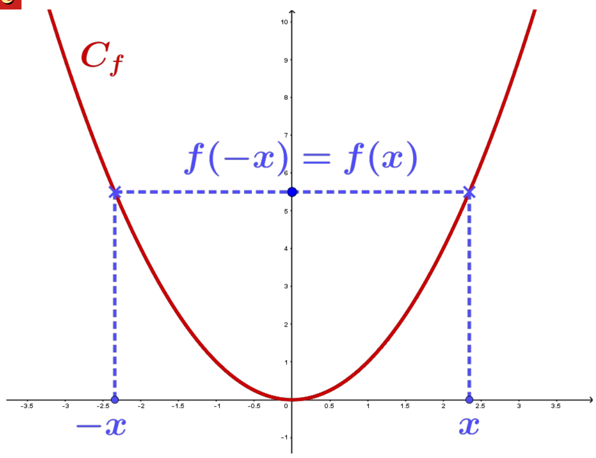
Définition 23

La **fonction carrée** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
Elle est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		↘	0	↗	

Représentation graphique



Remarques

• La courbe représentative de la fonction carrée est une courbe appelée **parabole**.
• La courbe représentative de la fonction carrée est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

V.3 Fonction inverse

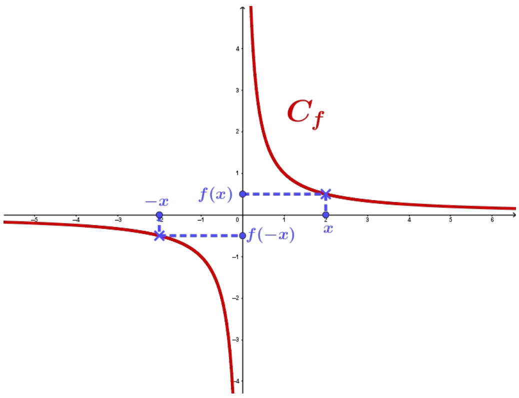
Définition 24

La **fonction inverse** est la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
Elle est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	↘	‖	↘

Représentation graphique



Remarques

• La courbe représentative de la fonction inverse est une courbe appelée **hyperbole**.
• La courbe représentative de la fonction inverse est **symétrique par rapport au centre du repère**.