

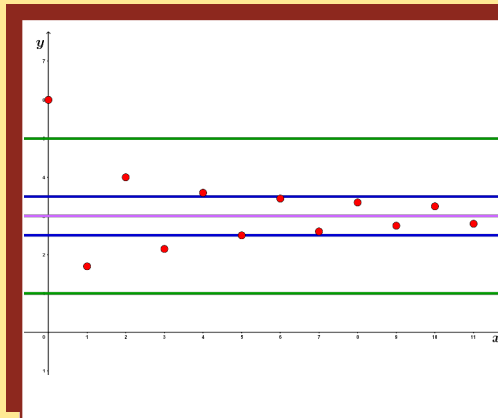
Limites de suites

I. Limite d'une suite

Soit (u_n) une suite et l un réel.

On dit que (u_n) **converge vers** l ou **tend vers** l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

Le réel l est appelé **limite** de (u_n) et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

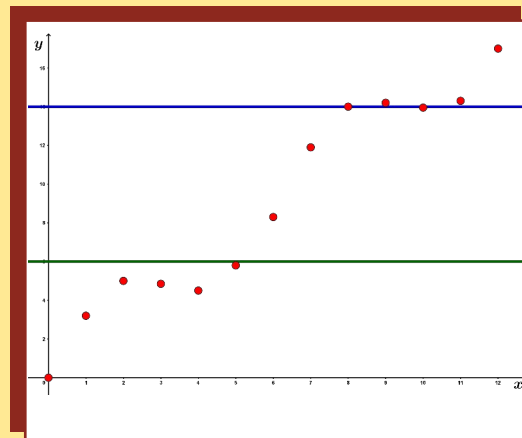


Si une suite (u_n) converge, alors sa limite est **unique**.

Soit (u_n) une suite et A un réel.

• On dit que (u_n) **diverge vers** $+\infty$ ou **tend vers** $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

• On dit que (u_n) **diverge vers** $-\infty$ ou **tend vers** $-\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.



II. Opérations sur les limites

II.1 Limites d'une somme de suites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$l + l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

II.2 Limites d'un produit de suites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

II.3 Limites d'un quotient de suites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l' et $l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n < 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

II.4 Formes indéterminées

Il y a quatre cas d'indétermination qui sont, en utilisant un abus d'écriture :

$$\ll \infty - \infty \gg, \ll 0 \times \infty \gg, \ll \frac{\infty}{\infty} \gg \text{ et } \ll \frac{0}{0} \gg$$

Pour lever une indétermination, le principe est alors de transformer l'écriture de l'expression étudiée pour se ramener aux cas connus.

Méthodes pour lever une indétermination :**• La factorisation d'un polynôme**

Déterminons la limite de la suite de terme général $n^2 - 4n + 1$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-4n + 1) = -\infty$, on est en présence de la forme indéterminée

« $\infty - \infty$ ». Pour lever l'indétermination, on factorise par n^2 .

On a pour tout entier naturel n non nul, $n^2 - 4n + 1 = n^2 \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{4}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 1$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$. Ainsi, par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 4n + 1) = +\infty$.

• La factorisation d'un quotient

Déterminons la limite de la suite de terme général $\frac{n-4}{2n+7}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-4) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+7) = +\infty$, on est en présence de la forme indéterminée

« $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour lever l'indétermination, on factorise le numérateur et le dénominateur par n .

On a $\frac{n-4}{2n+7} = \frac{n \left(1 - \frac{4}{n} \right)}{n \left(2 + \frac{7}{n} \right)} = \frac{1 - \frac{4}{n}}{2 + \frac{7}{n}}$. Or par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{n} \right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{7}{n} \right) = 2$.

Ainsi, par limite de quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-4}{2n+7} = \frac{1}{2}$.

• La quantité conjuguée

Déterminons la limite de terme général $\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+3} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} = +\infty$, on est en présence de la forme indéterminée

« $\infty - \infty$ ». Pour lever l'indétermination, on utilise la quantité conjuguée.

On a pour tout entier naturel n , $\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} = (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) \times \frac{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{n+3}^2 - \sqrt{n+2}^2}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{n+3 - (n+2)}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{n+3 - n - 2}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+3} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} = +\infty$. D'où, par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+3} + \sqrt{n+2} = +\infty$.

Donc, par inverse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} = 0$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) = 0$.

III. Théorèmes sur les limites

III.1 Limites et inégalités

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites et l un réel. Si à partir d'un certain rang, on a :

Théorème de comparaison

- $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème d'encadrement

$v_n \leq u_n \leq w_n$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Inégalités et limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 , tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

III.2 Limites d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_p et de raison r non nulle.

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

III.3 Limites d'une suite géométrique

Soit q un réel.

- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) diverge et n'a pas de limite.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q avec $q \geq 0$ et de premier terme u_p , où $p \in \mathbb{N}$.

- Si $q > 1$ et $u_p > 0$, alors la suite (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $q > 1$ et $u_p < 0$, alors la suite (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_p$.
- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) diverge et n'a pas de limite.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q avec $-1 < q < 1$ et de premier terme u_p , où $p \in \mathbb{N}$.

Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n) . Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_p}{1-q}$.

III.4 Limites d'une suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique de premier terme u_p , où $p \in \mathbb{N}$, et telle que pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

Soit l le réel tel que $l = al + b$. La suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq p$ par $v_n = u_n - l$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme $v_p = u_p - l$.

V. Algorithme de calcul

Un algorithme est une suite finie d'instructions données dans un certain ordre permettant de résoudre un problème. Ce mot vient du nom du mathématicien perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (8^e siècle après J.C.), surnommé le père de l'algèbre.

Exemple 1

On souhaite mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à un réel A donné.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 + 2$. On peut démontrer que (u_n) est croissante et que sa limite est $+\infty$. On a $u_0 = 3 \times 0^2 + 2 = 2$.

En langage de programmation, on a par exemple (sur TI) :

```
PROGRAM : SEUIL
: Prompt A
: 0 → N
: 2 → U
: While U < A
: N + 1 → N
: 3 * N^2 + 2 → U
: End
: Disp N
```

Exemple 2

Étant donné une suite géométrique de raison $q \in]0; 1[$, on souhaite mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel les termes de la suite sont inférieurs à un réel a donné.

On injecte à un patient une dose de 2 cm^3 de médicament. Chaque heure le volume du médicament dans le sang diminue de 12%. Pour tout entier n , on note u_n le volume du médicament en cm^3 .

On souhaite connaître la « demi-vie » du médicament, c'est-à-dire le moment où le médicament sera absorbé à 50%.

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1 - \frac{12}{100} = 0,88$. Pour tout entier n , $u_n = 2 \times 0,88^n$.

Un algorithme se construit en trois phases : l'**initialisation**, le **traitement** et la **sortie**.

- L'initialisation consiste à affecter aux différentes variables de départ leur valeur. Ici, les deux variables sont n (l'indice de la suite qui correspond au nombre d'heures) qui débute à 0 et u (le volume de médicament dans le sang) qui débute à 2.
- Le traitement consiste à effectuer les différents calculs pour atteindre l'objectif. Ici, tant que u (le volume de médicament dans le sang) est supérieur à 1, on continue à calculer les termes de la suite.
- La sortie consiste à afficher le résultat trouvé. Ici, on affichera la valeur de n , c'est-à-dire au bout de combien d'heures le médicament sera à moitié absorbé.

En langage de programmation, on a par exemple (sur TI) :

```
PROGRAM : SEUIL  
: 0 → N  
: 2 → U  
: While U > 1  
: N + 1 → N  
: 2 * 0,88N → U  
: End  
: Disp N
```

```
PROGRAM : SEUIL  
: 0 → N  
: While 2 * 0,88N > 1  
: N + 1 → N  
: End  
: Disp N
```

L'algorithme nous donne un seuil de 6, c'est-à-dire qu'à partir de 6 heures après l'injection du médicament, il en restera moins de la moitié dans le corps du patient.