

Limites de suites

Exercice 1

Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0=6$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 2$.

Exercice 2

Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0=-8$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 1$.

Exercice 3

Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0=6$ et pour tout entier n naturel, $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 5$.

Exercice 4

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Tracer la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$ dans un repère orthonormé.
2. Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
3. Conjecturer les variations de la suite (u_n) et sa limite.

Exercice 5

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 1$.

1. Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n) .
2. Conjecturer les variations de la suite (u_n) et sa limite.

Exercice 6

Calculer la limite des suites dans chacun des cas :

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $a_n = n^2 + n^5$; | 2. $b_n = \sqrt{n} + 3n^2$; | 3. $c_n = (n+1)\left(-3 + \frac{1}{n}\right)$; |
| 4. $d_n = -\frac{3}{n+1}$; | 5. $e_n = 2 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}$; | 6. $f_n = -2n^2 - 1$; |
| 7. $g_n = 3 - \frac{1}{n^2}$; | 8. $h_n = \frac{2}{\sqrt{n}} + \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; | 9. $i_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$; |
| 10. $j_n = \frac{3}{2n+7}$; | 11. $k_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)\left(3 + \frac{1}{n}\right)$; | |
| 12. $l_n = \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}\left(2 - \frac{1}{n}\right)$. | | |

Exercice 7

Calculer la limite des suites dans chacun des cas :

1. $u_n = 3n^2 + 2n + 5$;
2. $u_n = \sqrt{n}(n^2 - 1)$;
3. $u_n = 5 + 2n + 3^n$;
4. $u_n = 1 - 6^n$;
5. $u_n = (2n - 1)(2 - n)$;
6. $u_n = \frac{3}{n^2}$;
7. $u_n = 5 - \frac{2}{n}$;
8. $u_n = 5 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$;
9. $u_n = 1 - \left(\frac{5}{2}\right)^n$;
10. $u_n = 3n^2 + 2n + 5 - \frac{6}{n}$;
11. $u_n = 1 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{3}{n^3}$;
12. $u_n = \frac{2^n - 2}{1 - 0,1^n}$.

Exercice 8

Calculer la limite des suites dans chacun des cas :

1. $m_n = \sqrt{n} - n$;
2. $o_n = \frac{2 + 3n}{4 - 5n}$;
3. $p_n = 3n^2 - n^3$;
4. $q_n = 2n^3 - 3n$;
5. $r_n = \frac{3n^2}{n^3 + 1}$;
6. $s_n = \frac{2n(n-1)}{n^2 + 1}$;
7. $t_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
8. $u_n = \frac{\sqrt{3n+1}}{3 + \sqrt{n}}$;
9. $v_n = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$;
10. $w_n = \frac{\pi}{n} \times \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}}$;
11. $x_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)} - n}$;
12. $y_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 9

Calculer la limite des suites dans chacun des cas :

1. $u_n = 6n^2 - n - 1$;
2. $u_n = 3n + 5 - 2\sqrt{n}$;
3. $u_n = 3^n - 2^n$;
4. $u_n = \frac{1 - 2n}{n + 1}$;
5. $u_n = \frac{1 - 2n^2}{1 + n}$;
6. $u_n = \frac{1 - 2n}{n^3 + 1}$;
7. $u_n = \frac{0,1^n}{1 - n^2}$;
8. $u_n = \frac{n^2 + 1}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$;
9. $u_n = (n + 2)\frac{3}{n^2}$;
10. $u_n = \frac{2n + 1}{n + 325}$;
11. $u_n = \frac{3}{2\sqrt{n} + 17}$;
12. $u_n = \frac{\sqrt{3n+1}}{3 + \sqrt{n}}$;
13. $u_n = \frac{\sqrt{n^2 + n + 2}}{\sqrt{n^2 - n - 1}}$;
14. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$;
15. $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$;
16. $u_n = 3^n - n$ (penser à l'inégalité de Bernoulli).

Exercice 10

Calculer la limite des suites dans chacun des cas :

1. $u_n = \frac{\cos n}{n}$;

2. $u_n = n + \sin n$;

3. $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1}$;

4. $u_n = \frac{\cos n}{n+1}$;

5. $u_n = \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2}$;

6. $u_n = n^2 + (-1)^n$;

7. $u_n = \frac{\cos n}{n^2}$;

8. $u_n = \frac{2 \cos n}{n} + \frac{\sin n}{2n}$;

9. $u_n = \frac{3 + (-1)^n}{n^2 + \sqrt{n}}$.

Exercice 11

Calculer la limite des suites dans chacun des cas :

1. $u_n = \frac{\sin n}{n}$;

2. $u_n = n + \cos n$;

3. $u_n = \frac{(-1)^n + 3n^2}{n^2}$;

4. $u_n = n + 1 + (-1)^n$;

5. $u_n = \frac{n + \sin n}{n - \sin n}$;

6. $u_n = n^2 - (-1)^n$;

7. $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$;

8. $u_n = 3(-1)^n + n$;

9. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$;

10. $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n + \sqrt{n}}$;

11. $u_n = 3n^3 + 3 \cos\left(\frac{1}{n}\right)$;

12. $u_n = -n + (-1)^n$;

13. $u_n = \frac{5n + (-1)^{n+1}}{2n + (-1)^n}$;

14. $u_n = n - 20 \sin n$;

15. $u_n = \frac{\sin(n^2 + 1)}{\sqrt{n-2}}$.

Exercice 12

Calculer la limite des suites dans chacun des cas :

1. $u_n = 2^n$;

2. $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$;

3. $u_n = -4^n$;

4. $u_n = 5^n$;

5. $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$;

6. $u_n = \left(-\frac{2}{7}\right)^n$;

7. $u_n = (-4)^n$;

8. $u_n = 1,3^n$;

9. $u_n = 0,6^n$;

10. $u_n = \left(-\frac{6}{7}\right)^n$;

11. $u_n = \left(\frac{1}{8}\right)^n - \left(\frac{6}{5}\right)^n$;

12. $u_n = (\sqrt{2})^n$.

Exercice 13

Calculer la limite des suites dans chacun des cas :

1. $u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n$;

2. $u_n = -84\left(\frac{3}{4}\right)^n$;

3. $u_n = \left(-\frac{2}{7}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$;

4. $u_n = (-3,4)^n$;

5. $u_n = -3\left(\frac{11}{9}\right)^n$;

6. $u_n = n + 2^n$;

7. $u_n = 2^n + 7^{-n}$;

8. $u_n = \frac{3^n + 1}{2^n - 5}$;

9. $u_n = 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$;

10. $u_n = \frac{3^n - 4^n}{4^n + 1}$;

11. $u_n = 1 + \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{5}{4}\right)^n$;

12. $u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$.

Exercice 14

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}$.

1. Calculer u_1 , u_2 , u_3 , u_4 et u_5 . Conjecturer la limite de la suite (u_n) .
2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n=u_n^2-4$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
 - b. Donner l'expression de v_n , puis celle de u_n en fonction de n .
3. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 15

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0=9$.

1. Exprimer les sommes suivantes en fonction de n :
 - a. $S_1=u_0+u_1+\dots+u_n$;
 - b. $S_2=u_0+u_1+\dots+u_{n+1}$.
2. Déterminer les limites de S_1 et S_2 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 16

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0=-10$.

1. Calculer une valeur approchée de la somme des 25 premiers termes de la suite (u_n) .
2. On note S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n) .
 - a. Donner l'expression de S_n en fonction de n .
 - b. Déterminer la limite de S_n .

Exercice 17

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_0=4$.

On note S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n) .

1. Donner l'expression de S_n en fonction de n .
2. Déterminer la limite de S_n .

Exercice 18

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=-\frac{3}{2}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-1$.

1. On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n=2u_n+6$.

- a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
- b. Exprimer v_n en fonction de n .
- c. Exprimer u_n en fonction de n .
- d. Déterminer la limite de (u_n) .

2. On définit la suite (S_n) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $S_n=\sum_{k=0}^n u_k=u_0+u_1+\dots+u_n$.

- a. Exprimer S_n en fonction de n .
- b. Déterminer la limite de S_n .

Exercice 19

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. On suppose que, pour tout entier $n \geq 5$, $u_n \geq n-3$. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 20

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2+3u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n=\frac{2}{u_n}$.
 - a. Calculer les trois premiers termes de la suite (v_n) .
 - b. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
 - c. Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
 - d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 21

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et pour tout entier n , $u_{n+1}=4u_n-9$.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n) .
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n par $v_n=u_n-3$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b. Donner l'expression de v_n en fonction de n . En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 22

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=-1$ et pour tout entier n , $u_{n+1}=5u_n-10$.

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n et calculer u_6 .

Exercice 23

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et pour tout entier n , $u_{n+1}=3u_n-14$.

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n et calculer u_8 .

Exercice 24

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et pour tout entier n , $u_{n+1}=-2u_n-12$.

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n et calculer u_{20} .

Exercice 25

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=4$ et pour tout entier n , $u_{n+1}=0,8u_n-4$.

1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .
2. Étudier les variations de la suite (u_n) et déterminer sa limite.
3. Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n) . Déterminer l'expression de S_n en fonction de n et en déduire sa limite.

Exercice 26

On veut étudier l'évolution du nombre d'habitants entre deux villes A et B. On suppose que la population totale des villes A et B est constante. En 2020, il y a 17500 habitants dans chaque ville.

D'une année sur l'autre, on suppose que 15% des habitants de la ville A partent pour habiter dans la ville B et 20% des habitants de la ville B partent pour aller dans la ville A.

On note a_n le nombre d'habitants de la ville A et b_n le nombre d'habitants de la ville B en $2020+n$.

1. Déterminer la valeur de $a_n + b_n$ pour tout entier n .
2. Justifier que pour tout entier n , $a_{n+1}=0,85a_n+0,2b_n$. En déduire que pour tout entier n , $a_{n+1}=0,65a_n+7000$.
3. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n . En déduire l'expression de b_n en fonction de n .

Exercice 27

Un groupe de presse édite un magazine qu'il propose en abonnement. Jusqu'en 2010, ce magazine était proposé uniquement sous forme papier.

Depuis 2011, les abonnés ont le choix entre la version numérique et la version papier.

Une étude a montré que, chaque année, certains abonnés changent d'avis : 10% des abonnés à la version papier passent à la version numérique et 6% des abonnés à la version numérique passent à la version papier.

On admet que le nombre global d'abonnés reste constant dans le temps.

On note a_n la proportion d'abonnés ayant choisi la version papier et b_n la proportion d'abonnés ayant choisi la version numérique en $2010+n$.

1. Justifier que $a_0=1$, $b_0=0$ et que pour tout entier n , $a_{n+1}=0,9a_n+0,06b_n$.
2. En déduire que pour tout entier n , $a_{n+1}=0,84a_n+0,06$.
3. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n .
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année la proportion d'abonnés à la version papier devient inférieure à la proportion d'abonnés à la version numérique.

Exercice 28

Une biologiste désire étudier l'évolution de la population de singes sur une île.

En 2020, elle estime qu'il y a 1000 singes sur l'île.

1. La biologiste suppose que la population de singes augmentent de 4% chaque année.

On note u_n le nombre de singes en milliers sur l'île en $2020+n$.

- a. Donner la valeur de u_0 et calculer u_1 .
- b. Déterminer la nature de la suite (u_n) , puis exprimer u_n en fonction de n .
- c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

- d. Que peut-on penser de ce modèle ?
2. La biologiste suppose finalement que la population de singes est modélisée par une suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier n , $v_{n+1} = 0,9v_n + 0,15$.
- a. Avec ce modèle, combien peut-on prévoir de singes en 2021 ?
- b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n .
- c. Déterminer les variations de la suite (v_n) et interpréter le résultat.
- d. On souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population de singes dépassera les 1400 individus. Trouver une méthode pour y répondre.

QCM

Pour chaque question, indiquer la ou les bonne(s) réponse(s).

1. Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. Alors (u_n) est :

- a. Convergente b. Divergente c. Monotone d. Non monotone

2. Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Alors (u_n) est :

- a. Convergente b. Divergente c. Monotone d. Non monotone

3. Les suites ci-dessous ont une limite égale à $-\infty$:

- a. $u_n = 4n - 1 + \frac{5}{\sqrt{n}}$ b. $v_n = 2^n$ c. $w_n = -n^2 + \sqrt{n}$ d. $z_n = \frac{n}{2 + \cos n}$

4. Les suites ci-dessous ont une limite égale à $+\infty$:

- a. $u_n = 3 \left(\frac{48}{47} \right)^n$ b. $v_n = 3n^2 + (-1)^n$ c. $w_n = 3^n - 9^n$ d. $z_n = \frac{-3n + 5}{\sqrt{n}}$

5. Les suites ci-dessous ont une limite finie :

- a. $u_n = \left(\frac{5}{2} \right)^n$ b. $v_n = 0,5^n - 2^n$ c. $w_n = 2 - \left(\frac{1}{10} \right)^n$ d. $z_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2}$

6. Soit deux suites (u_n) et (v_n) telles que pour tout entier n , $u_n \leq v_n$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ si :

- a. $u_n = \frac{2n-4}{n+5}$ b. $u_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ c. $u_n = \sqrt{n^2+4}$ d. $u_n = \frac{n+1}{n^2+1}$

7. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2}{5^n}$ est :

- a. Bornée b. Non majorée c. Croissante d. Converge vers 0

On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) telles que pour tout entier n , $u_n \leq v_n \leq w_n$.

8. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors :

- a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$ b. (u_n) est majorée c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ d. (w_n) n'a pas de limite

9. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2$, alors :

- a. (v_n) est majorée b. (v_n) converge vers 0
c. (v_n) est bornée d. On ne peut pas dire si (v_n) a une limite

10. Si $u_n = \frac{2n^2-1}{n^2}$ et $w_n = \frac{2n^2+3}{n^2}$, alors :

- a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$ d. (v_n) n'a pas de limite

Problèmes

Problème 1 ...Paradoxe de Zénon...

Un archer tire une flèche. Pour atteindre la cible, la flèche doit parcourir la moitié de la distance qui la sépare de la cible, puis la moitié de la distance qui reste, puis la moitié de la distance qui reste, etc... Elle ne peut donc jamais atteindre la cible. Où est l'erreur dans ce raisonnement ?

Problème 2 ...Partager en trois...

On partage un carré de côté 1 en quatre carrés de même taille et on noircit le carré inférieur gauche. On applique le procédé au carré en haut à droite et ainsi de suite. Quelle sera l'aire de la partie noire lorsqu'on poursuit indéfiniment la construction ?

Problème 3 ...Calcul de somme...

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.
b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.
3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
b. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.
c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n .

Problème 4 ...Une histoire de rebond...

La hauteur atteinte par une balle diminue de 19% à chaque rebond. Le temps entre chaque rebond diminue lui de 10%.

1. Une balle est lancée sur le sol. On appelle u_n la hauteur maximale en mètre de la balle après le n -ième rebond et v_n le temps en seconde séparant le n -ième rebond du suivant.

On donne $u_1 = 1,25$ et $v_1 = 1$.

- a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ? Quelle est sa limite ?
- b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . Que peut-on en déduire pour la suite (v_n) ? Quelle est sa limite ?
- c. Pour n strictement positif, exprimer v_n en fonction de n .
2. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par la somme des n premiers termes de la suite (v_n) .
a. Pour n strictement positif, exprimer w_n en fonction de n .
b. Étudier la limite de la suite (w_n) . Comment interpréter ce résultat ?
c. Quelle sera la distance totale parcourue par la balle avant son arrêt ?

Problème 5 ...Suites imbriquées...

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 1, v_0 = \sqrt{2}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

1. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.
- a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$.
- b. En déduire sa limite.
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n$.
3. Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) .
4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Problème 6 ...Une histoire de tigres...

On s'intéresse à l'évolution d'une population de tigres dans une réserve naturelle.

En 2020, il y a 100 tigres. Puis chaque année, 10% de la population de tigres meurt et 5 nouveaux tigres sont accueillis dans la réserve.

On note u_n le nombre de tigres en $2020 + n$.

1. Déterminer le nombre de tigres dans la réserve en 2021.
2. Donner la valeur de u_0 et justifier que pour tout n entier, $u_{n+1} = 0,9u_n + 5$.
3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .
4. Étudier les variations de la suite (u_n) et interpréter le résultat.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat.

Problème 7 ...Loto...

Lucille gagne 10 000 000 € au loto le 1^{er} janvier 2020. Elle dépose la somme sur un compte en banque et elle décide de dépenser chaque année un quart de la somme qui lui reste.

1. Quelle somme reste-t-il sur son compte le 1^{er} janvier 2021 ?
2. On note u_n la somme restante sur le compte le 1^{er} janvier $2020 + n$.
- a. Donner la valeur de u_0 et u_1 .
- b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire la nature de la suite (u_n) .
4. On note S_n la somme des dépenses les n premières années.
- a. Donner l'expression de S_n en fonction de n .
- b. Déterminer la limite de S_n et interpréter le résultat.

Problème 8 ...Suites croisées...

Dans un pays, deux fournisseurs d'électricité ont le monopole du marché : *Electric* et *Energo*.

On s'intéresse à la répartition des parts de marché de ces deux fournisseurs.

En 2020, *Electric* possède 55% des parts du marché. Chaque année, on prévoit que *Electric* perde 5% de ses clients, mais qu'il récupère 15% des clients de *Energo*.

On note a_n le pourcentage des parts du marché de *Electric* et b_n celui de *Energo* en 2020+ n .

1. Déterminer la valeur de $a_n + b_n$ pour tout entier n .
2. Justifier que pour tout entier n , $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,15b_n$.
3. En déduire que $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,15$.
4. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n .
5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter le résultat.

Problème 9 ...Poissons dans l'eau...

Des chercheuses et des chercheurs veulent étudier le nombre de poissons dans l'étang Lagoon.

Pour cela, ils commencent une étude et comptent 9000 poissons dans l'étang.

Partie A

Lagoon est un bassin artificiel, ce qui permet de contrôler les conditions de vie et le nombre de poissons pêchés. D'une année sur l'autre, a % de poissons meurent (de manière naturelle et par la pêche) et b % de poissons naissent, avec a et b des réels fixes.

On note u_n le nombre de poissons, n années après le début de l'étude.

1. Donner la valeur de u_0 et justifier que pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{b-a}{100}\right)$.
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Selon les valeurs de a et b , déterminer le sens de variation de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte.
4. Selon les valeurs de a et b , déterminer la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte.

Partie B

Les chercheurs constatent empiriquement que le nombre de poissons dans Lagoon diminue chaque année de 20% par rapport à l'année précédente.

Lorsqu'ils commencent leur deuxième étude, ils comptent 3000 poissons dans l'étang.

Et pour leur deuxième étude, ils décident, pour compenser la baisse naturelle, de rajouter chaque année 2150 poissons dans l'étang.

On note v_n le nombre de poissons dans l'étang n années après le début de la deuxième étude.

1. Justifier que $v_0 = 3000$ et que pour tout entier n , $v_{n+1} = 0,8v_n + 2150$.
2. À l'aide d'une calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (v_n) à l'infini.
3. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n .
4. En déduire la limite de la suite (v_n) et vérifier le résultat de trouvé à la question B.2.

Problème 10 ...Une histoire de conjectures...

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=6$ et pour tout entier n , $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1$.

1.
 - a. Représenter graphiquement la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{2}x+1$.
 - b. Représenter sur le même graphique les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
 - c. Conjecturer les variations et la limite de la suite (u_n) .
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n par $v_n=u_n-2$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
 - b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n .
 - c. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
3. Démontrer les conjectures de la question 1.