

Chapitre 2

Probabilités conditionnelles et indépendance

I. Rappels

Définition 1

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble Ω (ou E) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.
- Un **événement** A est une partie de l'univers Ω (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de Ω).
- Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.
- L'**événement contraire** de A , noté $\bar{A}$, est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A .

Propriété 2

- La probabilité d'un événement A , notée $P(A)$, est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A** .
- Pour tout événement A , on a $0 \leq P(A) \leq 1$.
- La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.
- La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Définition 3

- Si $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ et si à chaque issue e_i on associe un nombre $P(e_i)$ tel que $0 \leq P(e_i) \leq 1$ et $P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n) = 1$, on dit que l'on a défini une **loi de probabilité** sur Ω .
- Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie**.

Définition 4

- L'événement « **A et B** », noté $A \cap B$, s'appelle l'**intersection** des événements A et B . Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
- L'événement « **A ou B** », noté $A \cup B$, s'appelle la **réunion** des événements A et B . Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.

Théorème 5

- Soit A et B deux événements d'une même expérience aléatoire. On a alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
- Si deux événements A et B sont **incompatibles**, alors $A \cap B = \emptyset$ et $P(A \cap B) = 0$.
 Pour conséquence, on en déduit que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

II. Probabilités conditionnelles

II.1 Probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé

Définition 6

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A) \neq 0$.

La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé est notée $P_A(B)$, et elle est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarques

- $P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A ».
- La formule s'écrit aussi de la manière suivante : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
- Si la probabilité de l'événement B est également non nulle, on peut définir la probabilité conditionnelle que l'événement A se réalise sachant que l'événement B est réalisé, notée $P_B(A)$ et définie par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Propriété 7

La probabilité $P_A(B)$ vérifie bien $0 \leq P_A(B) \leq 1$ et $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

Propriété 8

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors :

$$P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Remarque

Cette égalité peut être utile si une de ces probabilités est à déterminer en connaissant les trois autres.

Exemple

Un sachet de 100 bonbons contient 40 bonbons acidulés, les autres bonbons sont à la guimauve. 18 des bonbons à la guimauve sont au parfum orange et 10 des bonbons acidulés sont au parfum orange. Les bonbons qui ne sont pas au parfum orange sont à la fraise.

On choisit un bonbon au hasard dans ce sachet. On note les événements suivants :

A : « Le bonbon est acidulé »

G : « Le bonbon est à la guimauve »

F : « Le bonbon est à la fraise »

O : « Le bonbon est au parfum orange »

De l'énoncé découle immédiatement la probabilité des événements A, G et $A \cap O$:

$$P(A) = \frac{40}{100} = 0,4, \quad P(G) = \frac{60}{100} = 0,6 \quad \text{et} \quad P(A \cap O) = \frac{10}{100} = 0,1.$$

De plus comme 18 des bonbons à la guimauve sont au parfum orange, on en déduit également une probabilité conditionnelle : la probabilité O sachant l'événement G :

$$P_G(O) = \frac{18}{60} = 0,3$$

À partir de ces données, on peut déduire la probabilité d'autres événements. À titre d'exemples :

• La probabilité que le bonbon choisi au hasard dans ce sachet soit un bonbon au parfum orange sachant qu'il est acidulé est :

$$P_A(O) = \frac{P(A \cap O)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$$

• La probabilité que le bonbon choisi au hasard dans ce sachet soit un bonbon à la guimauve et au parfum orange est :

$$P(G \cap O) = P_G(O) \times P(G) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$$

II.2 Utilisation de tableaux

Les tableaux à double entrées permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Définition 9

- $P(A \cap B)$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la colonne B.
- $P(A)$ (respectivement $P(B)$) se lit sur la dernière colonne (respectivement la dernière ligne).
- $P_A(B)$ (ou $P_B(A)$) s'obtient en calculant le quotient des deux probabilités adéquates :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple

Un club sportif rassemble 180 membres répartis en juniors et seniors. On compte 135 seniors dont 81 hommes. Il y a 27 garçons parmi les juniors.

En choisissant une femme au hasard, calculer la probabilité d'avoir une juniore.

	J	S	Total
H	$\frac{27}{180}=0,15$	$\frac{81}{180}=0,45$	$0,15+0,45=0,6$
F	0,1	0,3	0,4
Total	0,25	$\frac{135}{180}=0,75$	1

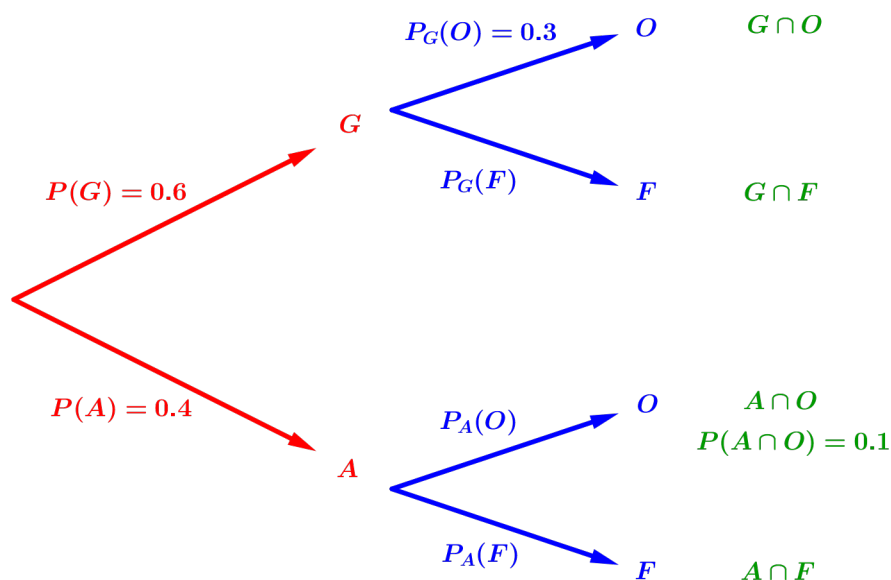
On a $P_F(J) = \frac{P(F \cap J)}{P(F)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$.

III. Arbre pondéré et calculs de probabilité

Dans certains cas, il s'avère utile de traduire une situation ou de modéliser une expérience aléatoire par un arbre. La construction de cet arbre peut permettre par exemple de dénombrer.

On y indique les probabilités des événements considérés. On parle alors d'un **arbre pondéré** ou **arbre de probabilités**.

On reprend l'exemple de la partie I, qui peut être modélisé par l'arbre pondéré suivant :



Le **premier niveau** de l'arbre précise les deux types possibles (guimauve ou acidulé) du bonbon choisi au hasard dans le sachet. On indique sur les branches du premier niveau issues du nœud les probabilités correspondant au fait qu'il soit à la guimauve ou acidulé.

Le **deuxième niveau** de l'arbre indique les parfums possibles sachant le type du bonbon. Ce deuxième niveau est composé de deux branches issues du nœud G et de deux branches issues du nœud A . On indique sur les branches de ce deuxième niveau les probabilités que le bonbon soit au parfum orange ou au parfum fraise sachant qu'il est à la guimauve ou acidulé. Ce sont les **probabilités conditionnelles** de l'événement F ou O sachant l'événement G ou A .

Chaque succession de branches est appelé **chemin**. Cet arbre a donc quatre chemins qui sont les événements $G \cap O$, $G \cap F$, $A \cap O$ et $A \cap F$. Ces chemins sont sur un même niveau, ce qui n'est pas toujours le cas, car un arbre n'est pas nécessairement symétrique (c'est un cas qui arrive rarement mais qui existe).

Généralement, les données dont on dispose ne nous permettent pas d'indiquer immédiatement sur toutes les branches d'un arbre pondéré les probabilités correspondantes. On a recours pour les déterminer à certaines règles qui découlent de la définition de la probabilité conditionnelle et des propriétés de sa loi.

Propriété 10

- La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.
- La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins (**formule des probabilités totales**).

Exemple

• La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités indiquées sur les branches du chemin qui aboutissent à ce chemin. Donc :

$$P(G \cap O) = P(G) \times P_G(O) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$$

$$P(A) \times P_A(O) = P(A \cap O), \text{ c'est-à-dire } 0,4 \times P_A(O) = 0,1. \text{ Par suite, } P_A(O) = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$$

• La somme des probabilités indiquées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1. Donc :

$$\text{À partir du nœud } G : P_G(O) + P_G(F) = 1 \text{ donc } P_G(F) = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$\text{À partir du nœud } A : P_A(O) + P_A(F) = 1 \text{ donc } P_A(F) = 1 - 0,25 = 0,75$$

Ces deux probabilités étant connues, on peut à l'aide de la propriété 3 utilisée au point 1 (probabilité d'un chemin) déterminer les deux autres probabilités :

$$P(G \cap F) = P(G) \times P_G(F) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$$

$$P(A \cap F) = P(A) \times P_A(F) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$$

• Une fois l'arbre pondéré complété, on peut être amené à déterminer la probabilité d'un événement qui ne peut pas être directement lue sur l'arbre. Dans l'exemple précédent, on peut s'intéresser à la probabilité que le bonbon choisi au hasard dans le sachet soit à la fraise. Il suffit dans ce cas d'appliquer la formule des probabilités totales :

L'événement F est associé au chemin $A \cap F$ et au chemin $G \cap F$. Par la **formule des probabilités totales**, on obtient :

$$P(F) = P(A \cap F) + P(G \cap F) = 0,3 + 0,42 = 0,72$$

La probabilité qu'un bonbon choisi au hasard dans le sachet soit à la fraise est de 0,72.

On généralise par la suite la **formule des probabilités totales**.

IV. Formule des probabilités totales

Définition 11

Soit n (où $n \geq 2$) événements de probabilités non nulles $A_1, A_2, \dots, A_n$ des sous-ensembles d'un univers Ω . Ces événements forment une **partition de l'univers Ω** (ou un **système complet d'événements**) si :

- Ils sont **disjoints** (ou **incompatibles**) deux à deux, c'est-à-dire que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Exemple

On lance un dé équilibré à six faces. On note les événements suivants :

P : « On obtient un chiffre pair »

I : « On obtient un chiffre impair »

P et I sont disjoints car ils n'ont aucun élément en commun et la réunion des deux regroupent tous les résultats de l'expérience.

Ainsi, $P \cap I = \emptyset$ et $P \cup I = \Omega$, donc P et I forment une partition de Ω .

Remarque

Un événement A et son événement contraire $\bar{A}$ forment toujours une partition de l'univers Ω .

Théorème 12

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements formant une partition de Ω .

Pour tout événement B de Ω , on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

Ou, de manière équivalente :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

On appelle cette égalité la **formule des probabilités totales**.

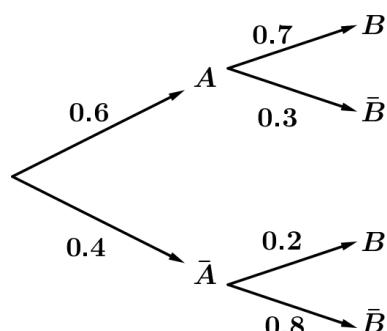
Démonstration

$$\begin{aligned} \text{On a } P(B) &= P(B \cap \Omega) \\ &= P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)) \\ &= P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)) \\ &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n) \end{aligned}$$

puisque les événements A_i et A_j sont disjoints pour tous les entiers $i \neq j$ et donc les événements $B \cap A_i$ et $B \cap A_j$ aussi.

Exemple

On considère les événements A et B vérifiant l'arbre pondéré suivant :



Déterminons $P(B)$. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0,6 \times 0,7 + 0,4 \times 0,2 = 0,5.$$

V. Indépendance**V.1 Indépendance de deux événements****Définition 13**

Soit A et B deux événements d'un univers Ω . On dit que A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété 14

Soit A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$.
Les événements A et B sont **indépendants** si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Démonstration

Soit A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$. On a $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

• Supposons que A et B soient deux événements indépendants. Alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

D'où $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

• Supposons que $P_A(B) = P(B)$. Alors $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ et donc $P(B) \times P(A) = P(A \cap B)$. Donc les événements A et B sont indépendants.

Exemple

Soit A et B deux événements indépendants tels que $P(A) = 0,8$ et $P(B) = 0,35$.

Alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,8 \times 0,35 = 0,28$.

Propriété 15

Soit A et B deux événements d'un univers Ω . Si A et B sont indépendants, alors $\bar{B}$ et B le sont aussi.

Démonstration

Soit A et B deux événements indépendants. D'après la formule des probabilités, on a :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \text{ et donc } P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Or A et B sont des événements indépendants, donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

$$\text{D'où } P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = (1 - P(A)) \times P(B) = P(\bar{A}) \times P(B).$$

On en déduit que $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Remarque

Il en est de même pour les événements A et $\bar{B}$ ainsi que pour les événements $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

Exemple

Soit A et B deux événements tels que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,35$ et $P(A \cap B) = 0,28$.

Montrons que A et B sont indépendants puis déterminons $P(A \cup B)$ et $P(\bar{A} \cap B)$.

$$\text{On a } P(A) \times P(B) = 0,8 \times 0,35 = 0,28 = P(A \cap B).$$

Donc A et B sont des événements indépendants.

$$\text{On a } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = 0,8 + 0,35 - 0,28 = 0,87.$$

Comme A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B le sont aussi.

$$\text{D'où } P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B) = (1 - P(A)) \times P(B) = (1 - 0,8) \times 0,35 = 0,2 \times 0,35 = 0,07.$$

V.2 Succession de deux épreuves indépendantes

Définition 16

En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soit indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une **succession de deux épreuves indépendantes**.

Définition 17

Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.

Exemple

On lance quatre fois de suite une pièce de monnaie. Ces expériences sont indépendantes car le résultat de la première expérience n'influe pas sur le résultat de la deuxième et il en va de même pour les autres.

Définition 18

Deux expériences sont dites **identiques** si elles ont les mêmes issues et les mêmes probabilités pour chaque issue.

Exemple

On lance quatre fois de suite une pièce de monnaie. Ces expériences sont identiques car chaque issue possède la même probabilité.

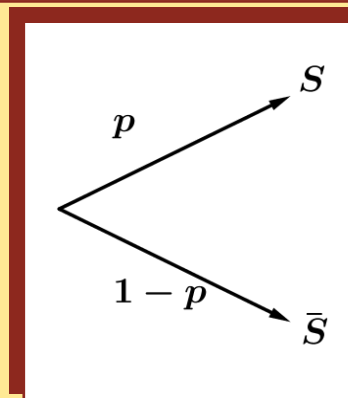
VI. Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

VI.1 Épreuve de Bernoulli

Définition 19

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p (compris entre 0 et 1) est une expérience aléatoire comportant deux issues :

- l'une appelée **succès**, noté S , de probabilité p .
- l'autre appelée **échec**, noté $\bar{S}$ ou E , de probabilité $q=1-p$.

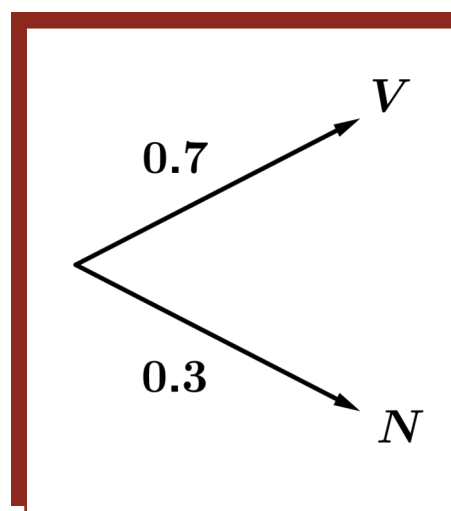


Remarque

Les termes « succès » et « échec » ne sont porteurs d'aucune valeur. Ils désignent simplement, de manière générique, les deux issues possibles. Le choix de ces termes est historiquement issu de la théorie des jeux.

Exemple

Dans un jeu télévisé opposant deux équipes jouant en alternance, chaque participant doit, à certains moments, prélever une boule d'une urne contenant 7 boules vertes et 3 boules noires. Les boules sont indistinguables au toucher et le tirage est équiprobable et avec remise. Si une boule verte est tirée, l'équipe concernée continue de jouer, ce qui est assimilé à un succès. Si une boule noire est tirée, c'est alors l'autre équipe qui joue, ce qui peut être assimilé à un échec. Cette épreuve de Bernoulli est représentée à l'aide de l'arbre pondéré ci-contre :



VI.2 Schéma de Bernoulli

Définition 20

Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1.

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est une expérience aléatoire consistant à répéter n fois, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli de paramètre p .

Exemple

On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir un pile est de $\frac{1}{3}$. Chaque lancer est identique et indépendant et on note S le succès « obtenir un Pile ».

On répète alors cinq fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli de succès S dont la probabilité est $\frac{1}{3}$.

C'est expérience aléatoire correspond donc à un schéma de Bernoulli avec $n=5$ et $p=\frac{1}{3}$.

La probabilité de l'issue $(P; F; P; P; F)$ est donc :

$$P((P; F; P; P; F)) = P(P) \times P(F) \times P(P) \times P(P) \times P(F) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{243}$$