

Chapitre 2

Limites de suites

I. Limites d'une suite

I.1 Limite finie

Définition 1

Soit (u_n) une suite et l un réel.

On dit que (u_n) **converge vers** l (ou **tend vers** l) si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

Le réel l est appelé **limite** de (u_n) et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Remarques

- Cette définition traduit l'accumulation des termes u_n autour de l .
- Si (u_n) converge vers l , on dit aussi que la suite est convergente vers l .
- On peut remplacer « tout intervalle ouvert contenant l » par « tout intervalle de la forme $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ où ε est un réel strictement positif ».

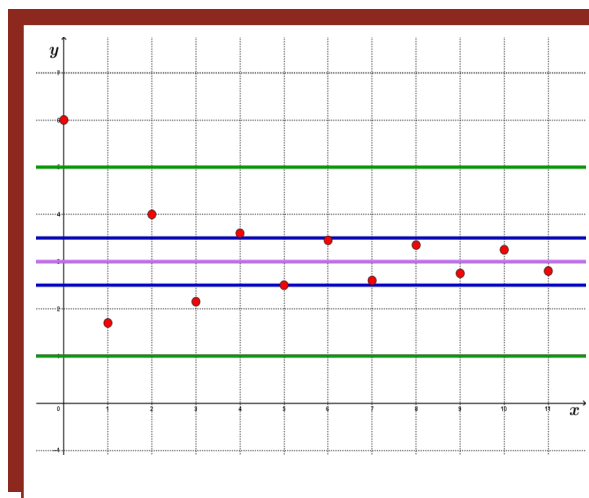
Exemple

On a représenté ci-contre une suite ayant une limite égale à 3.

À partir du rang 1, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]3-2; 3+2[=]1; 5[$.

À partir du rang 5, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]3-0,5; 3+0,5[=]2,5; 3,5[$.

On constate que les points sont de plus en plus proches de la droite d'équation $y=3$ et donc que les termes de la suite (u_n) seront tous dans un intervalle de la forme $]3-\varepsilon; 3+\varepsilon[$ où ε peut être aussi petit que l'on veut.



Théorème 2

Si une suite (u_n) converge, alors sa limite est **unique**.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Remarque

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$.

Propriété 3

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$
- De manière générale, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

Démonstration

Démontrons que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0.

Soit $I =]-A; A[$ un intervalle ouvert centré en 0 avec $A > 0$.

Pour tout $n > \frac{1}{A}$, on a $0 < \frac{1}{n} < A$ et donc $-A < \frac{1}{n} < A$.

Ayant choisi un intervalle I de façon arbitraire de centre 0, on a démontré que tous les termes de la suite appartiennent à I à partir de $n > \frac{1}{A}$. Par définition, la suite (u_n) converge vers 0.

On procède par un raisonnement analogue pour démontrer les autres limites.

1.2 Limite infinie**Définition 4**

Soit (u_n) une suite et A un réel.

- On dit que (u_n) **diverge vers** $+\infty$ (ou **tend vers** $+\infty$) si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- On dit que (u_n) **diverge vers** $-\infty$ (ou **tend vers** $-\infty$) si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Remarques

- Cette définition traduit l'idée que les termes u_n arrivent à dépasser tout nombre A , aussi grand soit-il, lorsque les valeurs de n deviennent suffisamment grandes.
- Si (u_n) diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), on dit aussi que la suite est divergente vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
- Si une suite est divergente, alors soit cette suite a une limite égale à $+\infty$, soit elle a une limite égale à $-\infty$, soit **elle n'a pas de limite**.
- Toute suite non convergente est divergente.

Attention!

Toutes les suites n'ont pas nécessairement de limite. Par exemple, la suite de terme général $(-1)^n$ diverge sans avoir de limite car $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1 .

Exemple

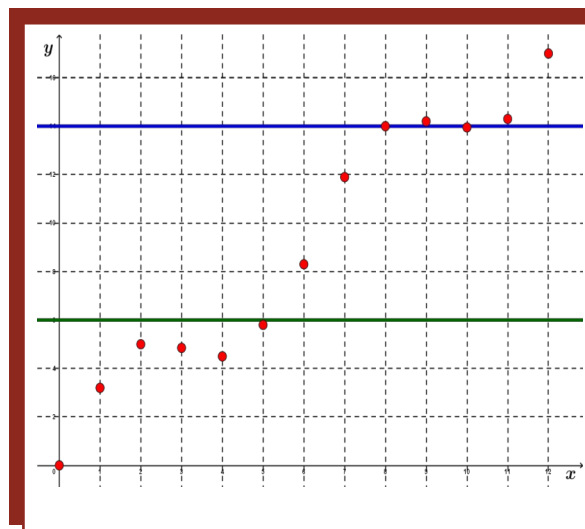
On a représenté ci-contre une suite (u_n) ayant une limite égale à $+\infty$.

À partir du rang 6, tous les termes de la suite sont plus grands que 6.

À partir du rang 11, tous les termes de la suite sont plus grands que 14.

Au bout d'un moment, tous les termes de la suite dépasseront n'importe quel nombre donné.

On peut définir de la même manière une limite égale à $-\infty$ si, pour tout nombre réel A , tous les termes de la suite sont inférieurs à A à partir d'un certain rang.

**Propriété 5**

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$
- De manière générale, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$

Démonstration

Démontrons que la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$ diverge vers $+\infty$.

Soit I un intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ avec A un réel strictement positif.

$u_n \in]A; +\infty[\Leftrightarrow n^2 > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A}$ (car n est positif).

Soit n_0 un entier tel que $n_0 > \sqrt{A}$. Alors pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \in I$.

Donc la suite (u_n) est divergente et a pour limite $+\infty$.

On procède de manière analogue pour démontrer les autres résultats.

II. Opérations sur les limites**II.1 Limites d'une somme de suites**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$l + l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemple

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 + n + \frac{5}{n^2}$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 + n) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$. Donc, par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

II.2 Limites d'un produit de suites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemple

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(2 - \frac{4}{n^2}\right)$.

Par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{4}{n^2}\right) = 2$.

Donc, par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$.

II.3 Limites d'un quotient de suites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l' et $l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n < 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Exemple

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$.

Par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + \sqrt{n}) = +\infty$. Donc par limite de quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

II.4 Formes indéterminées

Il y a quatre cas d'indétermination qui sont, en utilisant un abus d'écriture :

$$\ll \infty - \infty \gg, \ll 0 \times \infty \gg, \ll \frac{\infty}{\infty} \gg \text{ et } \ll \frac{0}{0} \gg$$

Pour lever une indétermination, le principe est alors de transformer l'écriture de l'expression étudiée pour se ramener aux cas connus.

Méthodes pour lever une indétermination :**• La factorisation d'un polynôme**

Déterminons la limite de la suite de terme général $n^2 - 4n + 1$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-4n + 1) = -\infty$, on est en présence de la forme indéterminée

« $\infty - \infty$ ». Pour lever l'indétermination, on factorise par n^2 .

On a pour tout entier naturel n non nul, $n^2 - 4n + 1 = n^2 \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{4}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 1$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$. Ainsi, par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 4n + 1) = +\infty$.

• La factorisation d'un quotient

Déterminons la limite de la suite de terme général $\frac{n-4}{2n+7}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-4) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+7) = +\infty$, on est en présence de la forme indéterminée

« $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour lever l'indétermination, on factorise le numérateur et le dénominateur par n .

On a $\frac{n-4}{2n+7} = \frac{n \left(1 - \frac{4}{n} \right)}{n \left(2 + \frac{7}{n} \right)} = \frac{1 - \frac{4}{n}}{2 + \frac{7}{n}}$. Or par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{n} \right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{7}{n} \right) = 2$.

Ainsi, par limite de quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-4}{2n+7} = \frac{1}{2}$.

• La quantité conjuguée

Déterminons la limite de terme général $\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+3} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} = +\infty$, on est en présence de la forme indéterminée

« $\infty - \infty$ ». Pour lever l'indétermination, on utilise la quantité conjuguée.

On a pour tout entier naturel n , $\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} = (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) \times \frac{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{n+3}^2 - \sqrt{n+2}^2}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{n+3 - (n+2)}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{n+3 - n - 2}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+3} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} = +\infty$. D'où, par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+3} + \sqrt{n+2} = +\infty$.

Donc, par inverse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} = 0$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) = 0$.

Remarques

- Dans l'idéal, on factorise par le terme de plus haut degré et si c'est une fraction, on factorise le numérateur et le dénominateur. Cependant, des factorisations différentes peuvent amener au même résultat. C'est par exemple le cas du polynôme $n^2 - 4n + 1$ que l'on aurait pu factoriser par n .
- La quantité conjuguée fonctionne particulièrement bien pour les expressions comportant des racines carrées. Elle consiste à multiplier par la même expression en prenant le signe opposé afin de faire apparaître une identité remarquable simplifiant les deux racines carrées.

III. Théorèmes sur les limites**III.1 Limites et comparaison****Théorème 6**

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration

- Soit I un intervalle de la forme $]A; +\infty[$ avec A un réel.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors par définition, I contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

On note ce rang n_1 .

De plus, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$. Notons ce rang n_2 .

On pose $n_0 = \max(n_1; n_2)$.

Pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_n \in I$, c'est-à-dire que $A < u_n$ et $u_n \leq v_n$. Donc $A < v_n$.

On en déduit que I contient tous les termes v_n à partir du rang n_0 . Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

- On raisonne de manière analogue.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par $u_n = \frac{n}{\sqrt{n-1}}$.

Pour tout $n \geq 2$, on a $0 < \sqrt{n-1} < \sqrt{n}$, d'où $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$.

On a alors $\frac{n}{\sqrt{n}} < \frac{n}{\sqrt{n-1}}$, soit $\sqrt{n} < \frac{n}{\sqrt{n-1}}$ et donc $\sqrt{n} < u_n$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Par comparaison, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

III.2 Théorème d'encadrement

Théorème 7

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites et l un réel.

Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite l , alors la suite (u_n) converge vers l .

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Remarque

Ce théorème est aussi appelé **théorème des gendarmes**.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$.

Pour tout $n \geq 1$, on a $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ et donc $-\frac{1}{n^2} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

III.3 Inégalités et limites

Théorème 8

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 , tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

III.4 Limites des suites arithmétique et géométrique

Théorème 9

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_p et de raison r non nulle où p est un entier naturel.

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration

• Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_p et de raison $r > 0$.

Alors, pour tout entier naturel $n \geq p$, $u_n = u_p + (n - p)r$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_p = u_p$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - p)r = +\infty$ (car $r > 0$). Par limite de somme, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

• On raisonne de manière analogue.

Théorème 10

Soit q un réel.

- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) diverge et n'a pas de limite.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Exemples

- Comme $2 > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$.
- Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$.

Théorème 11

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q avec $q \geq 0$ et de premier terme u_p , où $p \in \mathbb{N}$.

- Si $q > 1$ et $u_p > 0$, alors la suite (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $q > 1$ et $u_p < 0$, alors la suite (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_p$.
- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) diverge et n'a pas de limite.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Exemples

• Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -4 \times 7^n$.

Comme $7 > 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7^n = +\infty$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

• Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3 \times 0,5^n$.

Comme $-1 < 0,5 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Propriété 12

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q avec $-1 < q < 1$ et de premier terme u_p , où $p \in \mathbb{N}$.

Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n) . Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_p}{1-q}$.

Démonstration

On a $S_n = \sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$. Comme $-1 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n-p+1} = 0$.

Par somme et par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$. Ainsi, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_p}{1-q}$.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3 \times 0,5^n$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

On a $u_0 = 3$ et $q = 0,5$. Alors $S_n = 3 \times \frac{1-0,5^{n+1}}{1-0,5}$.

Comme $-1 < 0,5 < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{1-0,5} = \frac{3}{0,5} = 6$.

III.5 Limites d'une suite arithmético-géométrique**Propriété 13**

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique de premier terme u_p , où $p \in \mathbb{N}$, et telle que pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

Soit l le réel tel que $l = \frac{b}{1-a}$. La suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq p$ par $v_n = u_n - l$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme $v_p = u_p - l$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Remarque

On peut déterminer l'expression de u_n en fonction de n à l'aide de la suite (v_n) .

En effet, pour tout entier $n \geq p$, $v_n = v_p \times a^{n-p}$. Or, $v_n = u_n - l$, ce qui signifie que $u_n = v_n + l$.

Ainsi, pour tout entier $n \geq p$, $u_n = v_p + a^{n-p} + l$.

V. Algorithme de calcul

Un algorithme est une suite finie d'instructions données dans un certain ordre permettant de résoudre un problème. Ce mot vient du nom du mathématicien perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (8^e siècle après J.C.), surnommé le père de l'algèbre.

Exemple 1

On souhaite mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à un réel A donné.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 + 2$. On peut démontrer que (u_n) est croissante et que sa limite est $+\infty$. On a $u_0 = 3 \times 0^2 + 2 = 2$.

En langage de programmation, on a par exemple (sur TI) :

```
PROGRAM : SEUIL
: Prompt A
: 0 → N
: 2 → U
: While U < A
: N + 1 → N
: 3 * N^2 + 2 → U
: End
: Disp N
```

Exemple 2

Étant donné une suite géométrique de raison $q \in]0; 1[$, on souhaite mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel les termes de la suite sont inférieurs à un réel a donné.

On injecte à un patient une dose de 2 cm^3 de médicament. Chaque heure le volume du médicament dans le sang diminue de 12%. Pour tout entier n , on note u_n le volume du médicament en cm^3 .

On souhaite connaître la « demi-vie » du médicament, c'est-à-dire le moment où le médicament sera absorbé à 50%.

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1 - \frac{12}{100} = 0,88$. Pour tout entier n , $u_n = 2 \times 0,88^n$.

Un algorithme se construit en trois phases : l'**initialisation**, le **traitement** et la **sortie**.

- L'initialisation consiste à affecter aux différentes variables de départ leur valeur. Ici, les deux variables sont n (l'indice de la suite qui correspond au nombre d'heures) qui débute à 0 et u (le volume de médicament dans le sang) qui débute à 2.
- Le traitement consiste à effectuer les différents calculs pour atteindre l'objectif. Ici, tant que u (le volume de médicament dans le sang) est supérieur à 1, on continue à calculer les termes de la suite.
- La sortie consiste à afficher le résultat trouvé. Ici, on affichera la valeur de n , c'est-à-dire au bout de combien d'heures le médicament sera à moitié absorbé.

En langage de programmation, on a par exemple (sur TI) :

```
PROGRAM : SEUIL
: 0 → N
: 2 → U
: While U > 1
: N + 1 → N
: 2 * 0,88^N → U
: End
: Disp N
```

```
PROGRAM : SEUIL
: 0 → N
: While 2 * 0,88^N > 1
: N + 1 → N
: End
: Disp N
```

L'algorithme nous donne un seuil de 6, c'est-à-dire qu'à partir de 6 heures après l'injection du médicament, il en restera moins de la moitié dans le corps du patient.