

Comportement de suites à l'infini

1. On veut émettre des conjectures sur le comportement de quelques suites.

À l'aide d'un tableur, on obtient le tableau suivant :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	10	100	1000	10000	1 E+ 06	1 E+ 09	1 E+ 012
2	n^2	100	10000	1000000	1 E+ 08	1 E+ 12	1 E+ 18	1 E+ 24
3	$1/n$	0,1	0,01	0,001	0,0001	1 E−06	1 E−09	1 E−12
4	$1/\text{racine}(n)$	0,31623	0,1	0,03162	0,01	0,001	3,2 E−05	1 E−06
5	$(1,01)^n$	1,10462	2,70481	20959,2	1,6 E+ 43			

Que constate-t-on ?

2. Étude de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$.

a. Déterminer un rang n_0 tel que $u_n > 1000$ pour tout entier $n \geq n_0$.

b. Déterminer un rang n_1 tel que $u_n > 10^{12}$ pour tout entier $n \geq n_1$.

c. Soit A un nombre positif donné (aussi grand que l'on veut).

Démontrer que $u_n > A$ à partir d'un certain rang. En déduire que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

3. Étude de la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $v_n = \frac{1}{n}$.

a. Déterminer un rang n_0 tel que $v_n < 0,1$ pour tout entier $n \geq n_0$.

b. Déterminer un rang n_1 tel que $v_n < 10^{-12}$ pour tout entier $n \geq n_1$.

Expliquer pourquoi on peut en déduire que, pour tout entier $n \geq n_1$, $-10^{-12} < v_n < 10^{-12}$.

c. Soit A un nombre positif donné (aussi petit que l'on veut).

Démontrer que $-A < v_n < A$ à partir d'un certain rang. En déduire que tout intervalle de la forme $] -A; A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite (v_n) converge vers 0.

Limites « piégeuses »

1. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_n = n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.
 - a. Donner les limites des suites (u_n) et (v_n) .
 - b. Exprimer le produit $u_n v_n$ en fonction de n . En déduire la limite de la suite $(u_n v_n)$.
 2. Soit (w_n) et (t_n) les suites définies par $w_n = \frac{1}{n^2}$ et $t_n = n$ pour $n \geq 1$.
 - a. Donner les limites des suites (w_n) et (t_n) .
 - b. Exprimer le produit $w_n t_n$ en fonction de n . En déduire la limite de la suite $(w_n t_n)$.
 3. Peut-on énoncer un résultat général pour la limite d'un produit lorsque l'une des suites tend vers 0 et l'autre vers l'infini ?
- Lorsque l'on ne peut pas énoncer de résultat, on dit qu'on est en présence d'une « forme indéterminée ». Mais « forme indéterminée » ne veut pas dire qu'il n'y a pas de limite.

Les gendarmes et le voleur

Soit les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = -\frac{1}{n}, \quad v_n = \frac{\cos(n)}{n} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n}$$

1. Établir l'encadrement $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout $n \geq 1$.
2. Donner les limites des suites (u_n) et (w_n) .
3. On a représenté ci-dessous les trois suites à l'aide d'un tableur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (v_n) ?

