

Chapitre 1

Préambule sur les suites

I. Généralités sur les suites

Intuitivement, une suite de nombre réels est une **liste ordonnée** de nombres réels, finie ou infinie. Cela signifie que parmi ces nombres, il y a un premier, que nous pourrions noter u_1 (qui se lit « u indice 1 »), un deuxième u_2 et, de manière générale, un n-ième u_n .

Définition 1

Une suite numérique est une **succession infinie de réels**. Une suite numérique est donc une fonction définie sur l'ensemble des **entiers naturels** $\mathbb{N}$.

Définition 2

Une suite numérique (u_n) définie à partir du rang p est une fonction qui à chaque entier $n \geq p$ associe un réel, noté u_n . Cette suite est aussi notée $(u_n)_{n \geq p}$ ou simplement u .
 u_n est appelé le **terme général** de la suite ou le **terme d'indice n** .
 u_p est le **terme initial** ou le **premier terme** de la suite.

Exemples

le nombre u_2 est le terme de rang 2 de la suite (u_n) , le nombre u_8 est le terme de rang 8 de la suite (u_n) , etc...

Remarques

- Il ne faut pas confondre le terme u_n avec la suite (u_n) . (u_n) désigne une suite tandis que u_n désigne un nombre.
- n est toujours un entier naturel, donc u_{-5} ou $u_{1,3}$ n'existent pas.

Attention à l'écriture indicielle!

- u_{n+1} est le terme d'indice $n+1$. C'est le terme qui suit le terme d'indice n , c'est-à-dire u_n . On ne doit pas le confondre avec $u_n + 1$ qui est la somme de u_n , le terme d'indice n , et de 1.
- u_{n-1} est le terme d'indice $n-1$. Il précède le terme u_n .

Indice	p	$p+1$	$p+2$	...	$n-1$	n	$n+1$
Terme	u_p	u_{p+1}	u_{p+2}	...	u_{n-1}	u_n	u_{n+1}

Exemples

1. Le tableau ci-dessous donne le nombre de bacheliers en France de 2000 à 2009.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Nombre de bacheliers	516550	499228	493755	502671	498372	506608	524057	521353

La suite (u_n) du nombre de bacheliers peut être définie en choisissant comme rang n le nombre d'années écoulées depuis l'an 2000.

On a alors : $u_0=516550$ le nombre de bacheliers de l'année 2000 ;

$u_5=506608$ le nombre de bacheliers de l'année 2005 ;

502671 est le terme de rang 3 de la suite (u_n) .

2. Soit (u_n) la suite des multiples de 7 avec $u_0=0$. On a alors $u_1=7$, $u_2=14$, ..., $u_9=63$, etc...

Remarque

Certaines suites peuvent être définies seulement à partir d'un rang p autre que 0.

Par exemple, pour des questions pratiques, on aurait pu définir la suite du premier exemple précédent à partir du rang 2000, avec $u_{2000}=516550$.

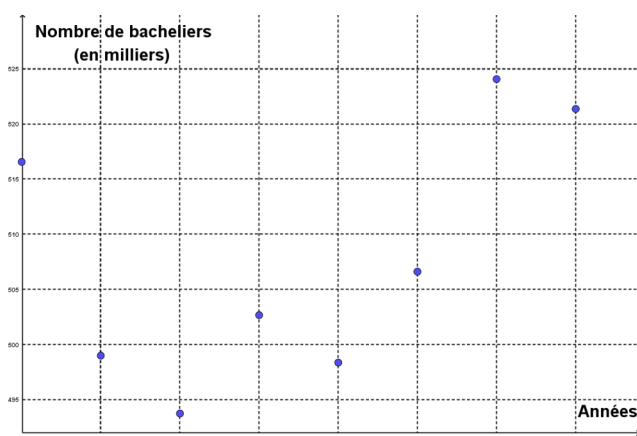
Dans d'autres situations, la définition de la suite interdit l'existence de certains termes.

Par exemple, la suite (u_n) telle que $u_n=\frac{1}{n}$ ne peut être définie que pour $n \geq 1$ (n ne pouvant prendre la valeur 0).

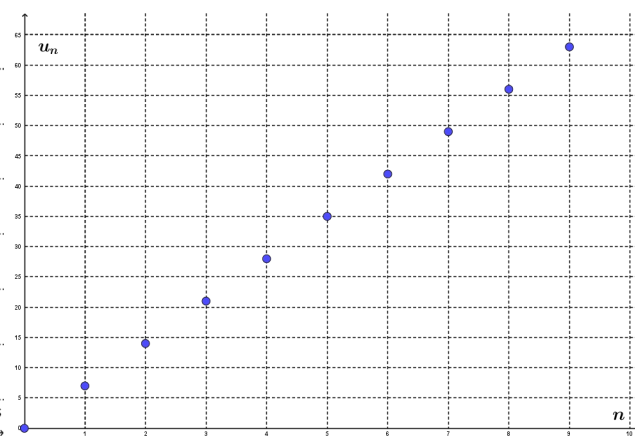
Propriété 3

Une suite numérique (u_n) peut être représentée par un **nuage de points** de coordonnées $(n; u_n)$.

Exemples



Le nombre de bacheliers en France de 2000 à 2007 (cf. exemple 1 précédent) peut être représenté par le nuage de points ci-dessus.



La suite des multiples de 7 (cf. exemple 2 précédent) peut être représentée par le nuage de points ci-dessus.

Remarque

Il s'agit alors d'une **succession de points**, et non d'une courbe. On dit alors que la représentation graphique n'est pas continue, ou qu'elle est discrète.

II. Mode de génération d'une suite numérique

Définir une suite numérique consiste à expliciter un procédé permettant de déterminer tous les termes de la suite.

II.1 Suite définie par une formule explicite

On définit la suite (u_n) par une expression du type $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique.

Définition 4

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$.
On peut définir une suite (u_n) en posant pour tout entier $n \geq a$, $u_n = f(n)$.

Remarques

- Une suite (u_n) est définie de **façon explicite** quand le terme u_n est exprimé en fonction de n .
- Avec cette définition, on peut donc calculer n'importe quel terme de la suite à partir de son indice.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \sqrt{2n+6}$.

Soit la fonction f définie sur $[-3; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x+6}$ (une racine carrée est définie sur les réels positifs).

Ainsi, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = f(n)$. On peut alors calculer les premiers termes de la suite :

$$u_0 = f(0) =$$

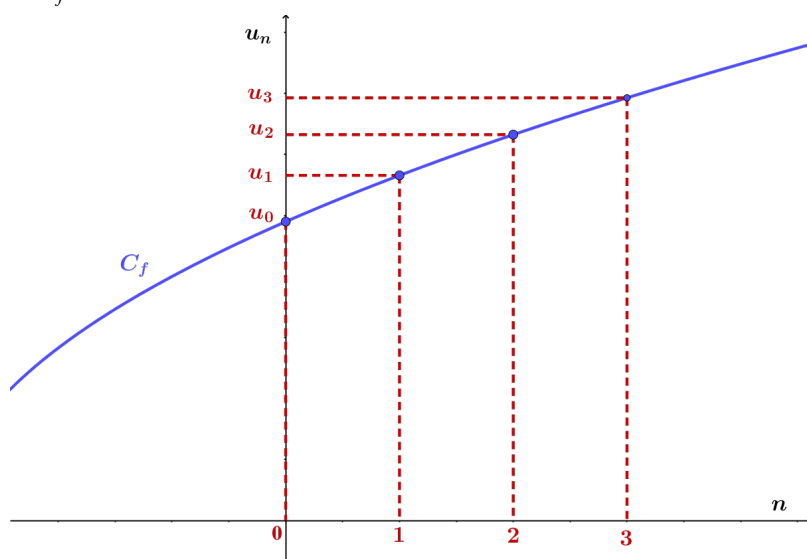
$$u_1 = f(1) =$$

$$u_2 = f(2) =$$

...

$$u_{100} =$$

Graphiquement, les termes de la suite (u_n) sont les ordonnées des points $A_n(n; u_n)$ d'abscisses entières de la courbe C_f .



II.2 Suite définie par une formule de récurrence

On donne la valeur du premier terme de la suite et un procédé appelé relation de récurrence qui permet de calculer un terme à partir du précédent.

Définition 5

Soit f une fonction définie sur un ensemble I . On suppose que si $x \in I$, alors $f(x) \in I$.
Soit a un nombre réel de I et p un entier.

On peut alors définir une suite (u_n) en posant :
$$\begin{cases} u_p = a \\ \text{pour tout entier } n \geq p, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Exemple

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 6}$.

Soit la fonction f définie sur $[-3; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x + 6}$.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On peut alors calculer les premiers termes de la suite (u_n) :

$$u_1 = f(u_0) =$$

$$u_2 = f(u_1) =$$

$$u_3 =$$

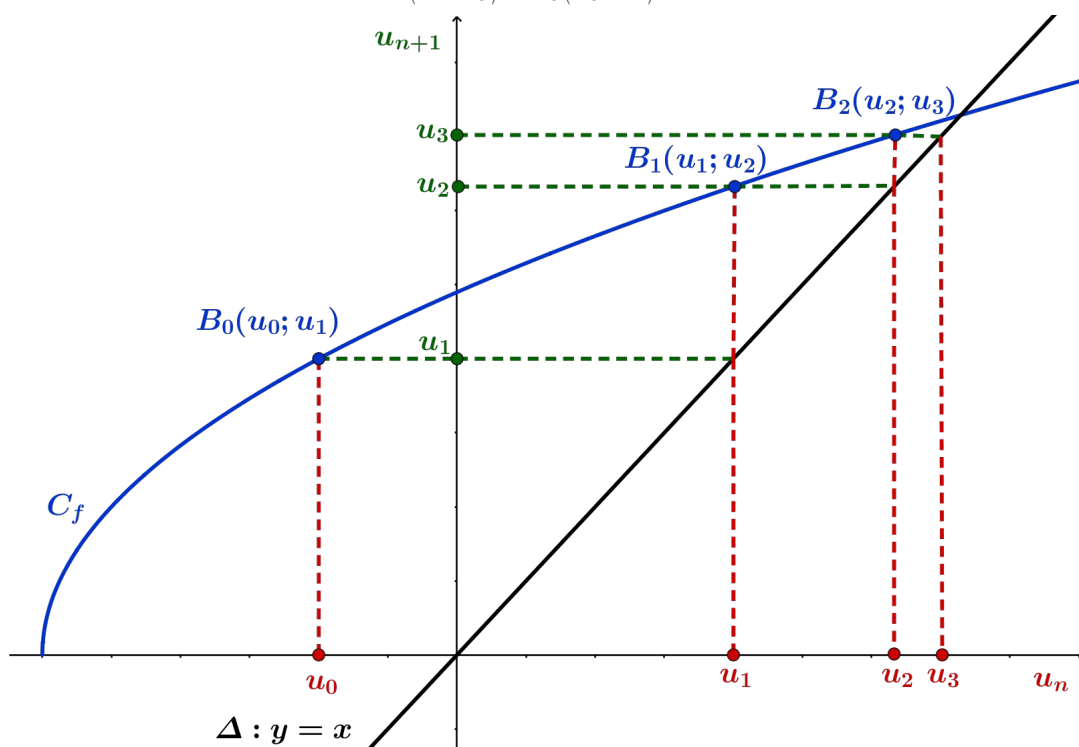
Avec ce procédé, pour calculer u_{100} , il faut connaître u_{99} , u_{98} , ...

Graphiquement, $B_0(u_0; u_1)$ appartient à la courbe C_f .

Pour déterminer $B_1(u_1; u_2)$, il faut placer u_1 , l'ordonnée de B_0 , en abscisse.

On « reporte » donc u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite Δ d'équation $y = x$.

On poursuit de même pour construire $B_2(u_2; u_3)$, $B_3(u_3; u_4)$, ...



III. Sens de variations

Propriété 6

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- Une suite (u_n) est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante à partir du rang p .
- Une suite (u_n) est **stationnaire** à partir du rang p si pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite (u_n) est **constante** lorsque pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.

Remarques

- Lorsqu'on ne précise pas « à partir du rang p », cela signifie que la suite (u_n) est croissante, décroissante, monotone, stationnaire ou constante à partir du rang de son premier terme.
- Étudier le sens de variation d'une suite consiste à préciser si la suite est croissante ou décroissante.
- Pour conjecturer le sens de variation d'une suite, on peut calculer les premiers termes de la suite.
- Une suite peut être ni croissante ni décroissante. C'est le cas par exemple de la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$. Si n est pair, la suite prend pour valeur 1 et si n est impair, la suite prend pour valeur -1 . Ainsi, ses valeurs alternent entre 1 et -1 . Elle n'est donc pas monotone.

Exemple

La suite des entiers impairs 1 ; 3 ; 5 ; etc... est une suite croissante à partir de son premier terme. Elle est donc monotone.

Propriété 7

Soit (u_n) une suite.

- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors (u_n) est une suite croissante.
- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors (u_n) est une suite décroissante.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n + 4$.

On a $u_{n+1} = 3(n+1) + 4 = 3n + 3 + 4 = 3n + 7$.

D'où $u_{n+1} - u_n = 3n + 7 - (3n + 4) = 3n + 7 - 3n - 4 = 3 > 0$.

Donc $u_{n+1} > u_n$ et ainsi, la suite (u_n) est (strictement) croissante sur $\mathbb{N}$.

Propriété 8

Soit (u_n) une suite dont **tous les termes sont strictement positifs**.

- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $u_{n+1} \geq u_n$ et donc (u_n) est une suite croissante.
- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors $u_{n+1} \leq u_n$ et donc (u_n) est une suite décroissante.

Exemple

Soit la suite (v_n) définie pour tout entier $n > 0$ par $v_n = \frac{n}{2^n}$.

(v_n) est une suite à termes strictement positifs. Pour tout $n > 0$, $u_n > 0$.

On a $v_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$.

$$\text{D'où } \frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} - 1 = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} - 1 = \frac{n+1}{2n} - 1 = \frac{n+1}{2n} - \frac{2n}{2n} = \frac{1-n}{2n}.$$

Or $n > 0$, donc $1-n \leq 0$ et $2n > 0$.

On en déduit que $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 \leq 0$ et donc que $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$.

Ainsi la suite (v_n) est décroissante (en particulier, (v_n) est strictement décroissante pour $n \geq 2$).

Propriété 9

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$.

Soit un entier $p \geq a$ et la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq p$ par $u_n = f(n)$.

- Si la fonction f est (strictement) **croissante** sur $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante** à partir du rang p .
- Si la fonction f est (strictement) **décroissante** sur $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante** à partir du rang p .

Démonstration

- Soit a un réel et f une fonction croissante sur l'intervalle $[a; +\infty[$.

Pour tout entier $n \geq p$, on a $n \leq n+1$.

Or, comme f est croissante sur $[a; +\infty[$, on en déduit que $f(n) \leq f(n+1)$ ie $u_n \leq u_{n+1}$.

Ainsi la suite (u_n) est croissante sur $[p; +\infty[$.

- On utilise un raisonnement analogue pour démontrer la décroissance.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \frac{1}{n}$.

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Donc pour tout entier $n > 0$, $u_n = f(n)$.

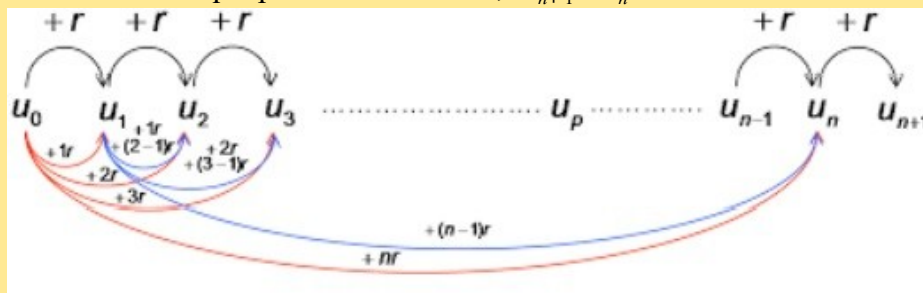
La fonction inverse étant décroissante sur $]0; +\infty[$, on en déduit que la suite (u_n) est décroissante pour tout $n > 0$.

IV. Suites arithmétiques

Définition 10

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre**.

Ainsi, il existe un réel r tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n + r$.



Le nombre r est appelé **raison** de la suite arithmétique (u_n) . Il est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques : pour tout entier n , $r = u_{n+1} - u_n$.

Exemple

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 3$.

Alors on a $u_1 = u_0 + r = -5 + 3 = -2$, $u_2 = u_1 + r = -2 + 3 = 1$, $u_3 = u_2 + r = 1 + 3 = 4$, etc...

Remarques

- La formule précédente est la **formule de récurrence** d'une suite arithmétique.
- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante égale à u_0 .

Propriété 11

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p$, on a $u_n = u_p + (n - p)r$.

En particulier, pour tout entier n , $u_n = u_0 + nr$.

Démonstration

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p . Par définition, on a pour tous n et p , $u_{n+1} = u_n + r$.

Calculons quelques termes de cette suite : $u_p = u_p$, $u_{p+1} = u_p + r$,

$u_{p+2} = u_{p+1} + r = (u_p + r) + r = u_p + 2r$, $u_{p+3} = u_{p+2} + r = (u_p + 2r) + r = u_p + 3r$, etc...

En répétant $n - p$ fois le procédé, on obtient : $u_n = u_{n-1} + r = (u_p + (n-1-p)r) + r = u_p + (n-p)r$.

- La démonstration est analogue en remplaçant u_p par u_0 .

Calculons quelques termes de cette suite : $u_0 = u_0$, $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$,

$u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$, etc...

En répétant n fois le procédé, on obtient : $u_n = u_{n-1} + r = (u_0 + (n-1)r) + r = u_0 + nr$.

Exemples

- Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 3$.
Alors pour tout n , on a $u_n = u_0 + nr = -5 + 3n$.
- Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_4 = 3$ et de raison $r = -2$.
Alors pour tout $n \geq 4$, on a $u_n = u_4 + (n-4)r = 3 - 2(n-4) = 3 - 2n + 8 = 11 - 2n$.

Remarque

La formule précédente est la **formule explicite** d'une suite arithmétique. Cette expression est bien plus pratique pour calculer des termes d'indice importants : en effet, on n'a pas besoin alors de calculer tous les termes précédents.

Propriété 12

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p .

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p .

Démonstration

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r > 0$. Pour tout n , $u_{n+1} = u_n + r$.

D'où $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r > 0$. Donc pour tout n , $u_{n+1} > u_n$.

Ainsi la suite (u_n) est (strictement) croissante.

La démonstration est analogue pour les deux autres cas.

Exemples

- La suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 3$ est croissante.
- La suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_7 = 10$ et de raison $r = -6$ est décroissante.

Propriété 13

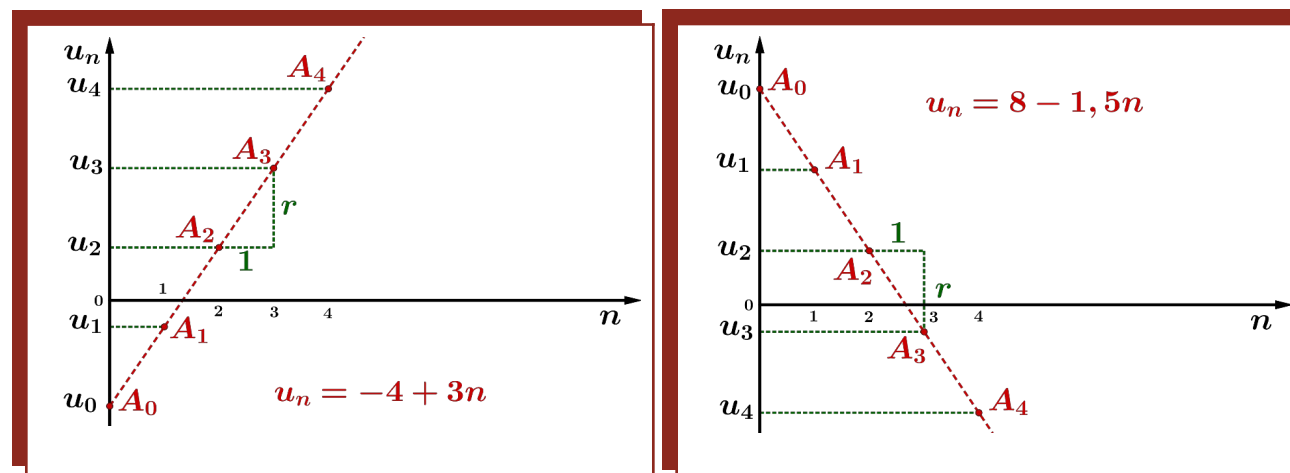
La représentation graphique d'une suite arithmétique (u_n) est un **ensemble de points isolés alignés de coordonnées $(n; u_n)$** .

Ces points sont situés sur une **droite** d'équation $y = rx + u_0$ (le coefficient directeur de la droite est la raison r).

Attention!

Les points de la suite arithmétique (u_n) sont situés sur une même droite mais ils représentent un nuage de points. La représentation graphique d'une suite arithmétique est donc un **ensemble de points isolés et non une droite**.

Exemples



Propriété 14

Soit n un entier naturel non nul. La somme des n premiers entiers est :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration

Notons $S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$

On a $S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$

En additionnant les égalités membres à membres, on obtient :

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$$

Or on ajoute ici n fois le terme $(n+1)$ donc $2S = n(n+1)$. D'où $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

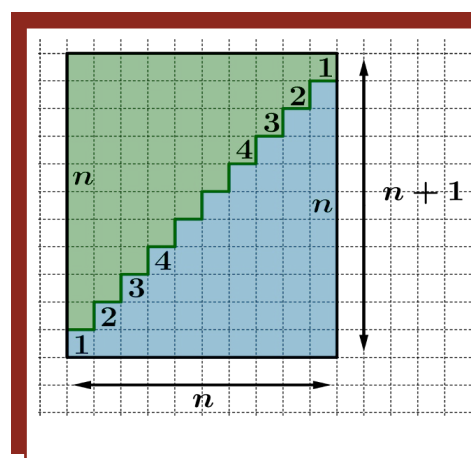
Autre démonstration :

On dispose côte-à-côte des rectangles de largeur 1 et de hauteur 1, 2, 3, ..., n , de façon à obtenir la surface bleue, et son symétrique la surface verte.

L'aire de chaque surface est : $1 + 2 + 3 + \dots + n$.

Or la réunion des surfaces verte et bleue est un rectangle de côtés n et $n+1$.

Donc : $2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n) = n(n+1)$, d'où le résultat.



Remarque

Pour tout entier n , la somme $1 + 2 + 3 + \dots + n$ est entière.

Le théorème ci-dessus permet ainsi d'affirmer que $\frac{n(n+1)}{2}$ est toujours entier.

Ce qui se justifie aisément par ailleurs : comme les entiers n et $n+1$ sont consécutifs, l'un des deux est pair ; le produit $\frac{n(n+1)}{2}$ est donc un nombre pair.

Exemples

- Soit $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$.

On a $S = \sum_{k=1}^{100} k = \frac{100(100+1)}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$.

- Soit $S = 2 + 4 + 6 + \dots + 50$.

On a $S = 2 + 4 + 6 + \dots + 50 = 2(1 + 2 + 3 + \dots + 25) = 2 \times \sum_{k=1}^{25} k = 2 \times \frac{25(25+1)}{2} = 650$.

Propriété 15

Soit (u_n) une suite arithmétique. La formule suivante donne la somme des termes consécutifs :

$$\text{Somme des termes consécutifs} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

En particulier, pour une suite arithmétique de premier terme u_0 :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

De manière plus générale, si n et p sont deux entiers naturels tels que $n > p$, alors :

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

Exemples

- Soit la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$. Calculons S_7 .

(u_n) étant arithmétique de raison $r = 3$, alors $u_n = u_0 + nr = 2 + 3n$. Donc $u_7 = 2 + 3 \times 7 = 23$.

On a alors $S_7 = (7+1) \times \frac{u_0 + u_7}{2} = 8 \times \frac{2+23}{2} = 8 \times \frac{25}{2} = 100$.

- Soit la suite arithmétique de premier terme $u_6 = 1$ et de raison $r = 7$. Calculons S_{15} .

(u_n) étant arithmétique de raison $r = 7$, alors $u_n = u_6 + (n-6)r = 1 + 7(n-6) = -41 + 7n$.

Donc $u_{15} = -41 + 7 \times 15 = 64$.

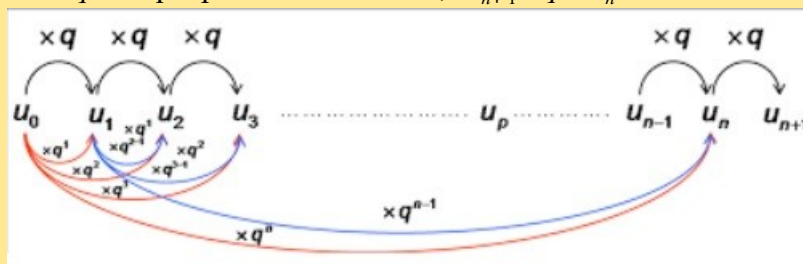
On a alors $S_{15} = (15-6+1) \times \frac{u_6 + u_{15}}{2} = 10 \times \frac{1+64}{2} = 10 \times \frac{65}{2} = 325$.

V. Suites géométriques

Définition 16

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre**.

Ainsi, il existe un réel q tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = q \times u_n$.



Le nombre q est appelé **raison** de la suite géométrique (u_n) .

Dans le cas où la suite (u_n) ne s'annule pas, q est égal au quotient de deux termes consécutifs

quelconques : pour tout entier n , $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exemple

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

Alors on a $u_1 = q \times u_0 = 2 \times 3 = 6$, $u_2 = q \times u_1 = 2 \times 6 = 12$, $u_3 = q \times u_2 = 2 \times 12 = 24$, etc...

Remarques

- La formule précédente est la **formule de récurrence** d'une suite géométrique.
- Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante égale à u_0 .

Propriété 17

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

En particulier, pour tout entier n , $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration

- Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p . Par définition, on a pour tous n et p , $u_{n+1} = q \times u_n$.

Calculons quelques termes de cette suite : $u_p = u_p$; $u_{p+1} = q \times u_p$,

$u_{p+2} = q \times u_{p+1} = q \times (q \times u_p) = q^2 \times u_p$, $u_{p+3} = q \times u_{p+2} = q \times (q^2 \times u_p) = q^3 \times u_p$, etc...

En répétant $n - p$ fois le procédé, on obtient : $u_n = q \times (q^{n-1-p} \times u_p) = q^{n-p} \times u_p = u_p \times q^{n-p}$.

- La démonstration est analogue en remplaçant u_p par u_0 .

Calculons quelques termes de cette suite : $u_0 = u_0$; $u_1 = q \times u_0$, $u_2 = q \times u_1 = q \times (q \times u_0) = q^2 \times u_0$,

$u_3 = q \times u_2 = q \times (q^2 \times u_0) = q^3 \times u_0$, etc...

En répétant n fois le procédé, on obtient : $u_n = q \times (q^{n-1} \times u_0) = q^n \times u_0 = u_0 \times q^n$.

Exemples

• Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $q = 4$.

Alors pour tout n , on a $u_n = u_0 \times q^n = -2 \times 4^n$.

• Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_5 = 7$ et de raison $q = -2$.

Alors pour tout $n \geq 5$, $u_n = u_5 \times q^{n-5} = 7 \times (-2)^{n-5}$.

Remarque

La formule précédente est la **formule explicite** d'une suite géométrique. Cette expression est bien plus pratique pour calculer des termes d'indice important : en effet, on n'a pas besoin alors de calculer tous les termes précédents.

Propriété 18

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_p > 0$.

- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p .
- Si $q < 0$, alors la suite (u_n) **n'est pas monotone**.

Remarque

Si $u_p < 0$, ces sens de variations sont **inversés**.

Exemples

- La suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 2$ est croissante.
- La suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $q = 0,2$ est décroissante.
- La suite géométrique (w_n) de premier terme $w_4 = -7$ et de raison $q = 0,6$ est croissante.
- La suite géométrique (z_n) de premier terme $z_{12} = 9$ et de raison $q = -2$ n'est pas monotone.

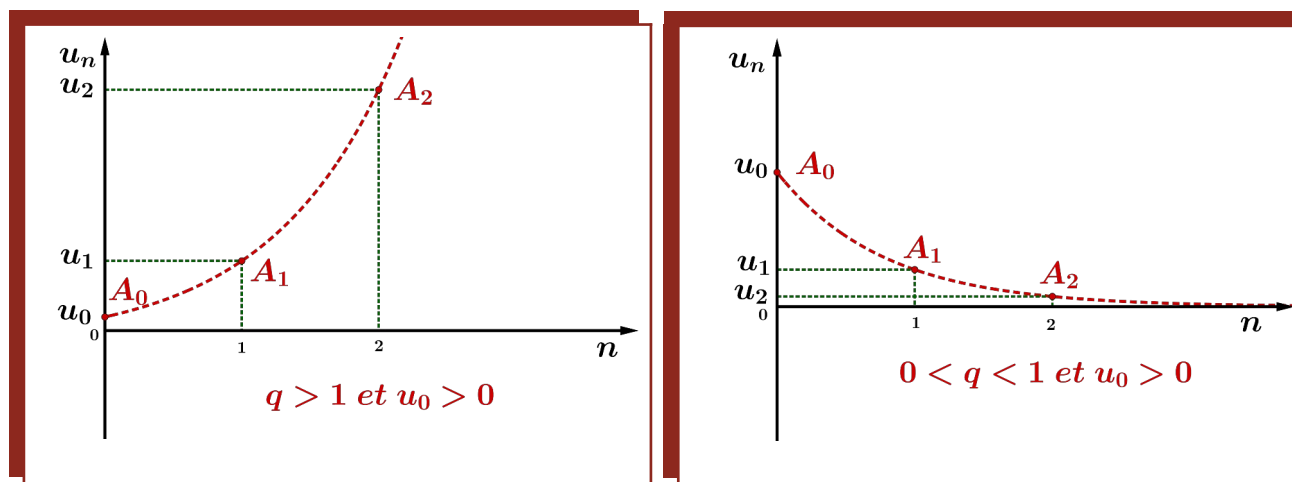
Propriété 19

La représentation graphique d'une suite géométrique (u_n) est un **ensemble de points isolés** $(n; u_n)$, situés sur une courbe dite **exponentielle**.

Attention!

Les points de la suite géométrique (u_n) sont situés sur une courbe mais ils représentent un nuage de points. La représentation graphique d'une suite géométrique est donc un **ensemble de points isolés et non une courbe**.

Exemples



Propriété 20

Soit n un entier naturel non nul et q un réel différent de 1. La somme des n premières puissances successives d'un nombre q est :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration

Notons $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n$

On a $qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1}$

En soustrayant les égalités membres à membres, on obtient :

$$S - qS = 1 - q^{n+1} \text{ ie } (1 - q)S = 1 - q^{n+1}$$

Or $1 - q \neq 0$, donc $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Exemple

• Soit $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 1024 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10}$.

On a $S = \sum_{k=0}^{10} 2^k = \frac{1 - 2^{10+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2048}{-1} = 2047$.

• Soit $S = 3 + 6 + 12 + \dots + 192$.

On a $S = 3(1 + 2 + 4 + \dots + 64) = 3(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^6) = 3 \times \sum_{k=0}^6 2^k = 3 \times \frac{1 - 2^{6+1}}{1 - 2} = 3 \times \frac{1 - 128}{-1} = 381$.

Propriété 21

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. La formule suivante donne la somme des termes consécutifs :

$$\text{Somme des termes consécutifs} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

En particulier, pour une suite géométrique de premier terme u_0 :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

De manière plus générale, si n et p sont deux entiers naturels tels que $n > p$, alors :

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Exemples

- Soit la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$. Calculons S_7 .

$$\text{On a alors } S_7 = 2 \times \frac{1 - 3^{7+1}}{1 - 3} = 2 \times \frac{1 - 3^8}{-2} = 6\,560.$$

- Soit la suite géométrique de premier terme $u_6 = 1$ et de raison $q = 7$. Calculons S_{15} .

$$\text{On a alors } S_{15} = 1 \times \frac{1 - 7^{15-6+1}}{1 - 7} = \frac{1 - 7^{10}}{-6} = 47\,079\,208.$$

VI. Suites arithmético-géométriques**Définition 22**

Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b tels que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = au_n + b$.

Remarques

- Si $a = 0$, (u_n) est une suite constante égale à b .
- Si $a = 1$, (u_n) est une suite arithmétique de raison b .
- Si $b = 0$, (u_n) est une suite géométrique de raison a .

Exemples

- Soit (u_n) une suite telle que, pour tout n , $u_{n+1} = 3u_n - 2$. (u_n) est une suite arithmético-géométrique avec $a = 3$ et $b = -2$.

• Nicolas dépose au début de chaque année, sur un compte au taux d'intérêt de 3 %, une somme de 1000€. Soit u_n le total de son épargne au début de l'année n . La relation entre u_n et u_{n+1} est donnée par : u_{n+1} est la somme du capital de l'année n , plus des intérêts gagnés et du capital supplémentaire apporté.

$$\text{Donc } u_{n+1} = u_n + 0,03u_n + 1\,000 = 1,03u_n + 1\,000.$$

La suite (u_n) est donc une suite arithmético-géométrique avec $a = 1,03$ et $b = 1\,000$.

Remarque

On retrouve les suites arithmético-géométriques dans des situations variées telles que l'étude de remboursement d'un capital, l'évolution d'un flux de population ou des calculs d'aires.

Dans les exercices, pour étudier une suite (u_n) arithmético-géométrique, on utilise une suite annexe (v_n) (donnée par l'énoncé et définie en fonction de (u_n)) qui est géométrique.

De manière générale, on démontre que (v_n) est une suite géométrique (en exprimant v_{n+1} en fonction de v_n) et on donne son expression générale. On en déduit alors l'expression générale de (u_n) . Enfin on conclut sur les variations et la limite de (u_n) .

Remarque

Nous verrons l'étude des limites plus tard dans l'année.

Méthode : Étude d'une suite arithmético-géométrique

M. Durand dépose 5000€ sur un compte rémunéré au taux annuel de 2,5 % et choisit d'y ajouter à la fin de chaque année la somme de 2000€. On note u_n le montant, en euros, du capital acquis au bout de n années.

- On exprime u_{n+1} en fonction de u_n :

Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'intérêt de 2,5 % est de $1 + \frac{2,5}{100} = 1,025$.

De plus, 2000€ sont ajoutés chaque début d'année.

Donc pour tout entier n , $u_{n+1} = 1,025 u_n + 2000$ et $u_0 = 5000$.

- On introduit la suite géométrique (v_n) :

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 80000$. On montre que (v_n) est une suite géométrique.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout entier } n, \text{ on a } v_{n+1} &= u_{n+1} + 80000 \\ &= 1,025 u_n + 2000 + 80000 \\ &= 1,025 u_n + 82000 \\ &= 1,025 \left(u_n + \frac{82000}{1,025} \right) \\ &= 1,025 (u_n + 80000) \\ &= 1,025 v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,025$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 80000 = 5000 + 80000 = 85000$.

- On exprime v_n en fonction de n :

Pour tout entier n , on a $v_n = v_0 \times q^n = 85000 \times 1,025^n$.

- On exprime u_n en fonction de n :

Pour tout entier n , on a $u_n = v_n - 80000 = 85000 \times 1,025^n - 80000$.

- On détermine la limite de la suite (u_n) :

$q = 1,025 > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,025^n = +\infty$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 85000 \times 1,025^n - 80000 = +\infty$.

- On cherche un seuil :

M. Durand souhaite s'acheter une voiture à 15000€. Il se demande combien d'années seront nécessaires pour que le montant du capital disponible dépasse 15000€. La calculatrice nous donne (programme ou table de valeurs) $n = 5$.

Donc il faudra 5 ans à M. Durand pour s'offrir sa voiture.