BACCALAURÉAT BLANC

ÉPREUVE DU JEUDI 13 FÉVRIER 2025

MATHÉMATIQUES
- SPÉCIALITÉ -

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter les quatre exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

Exercice 1 **5 points**

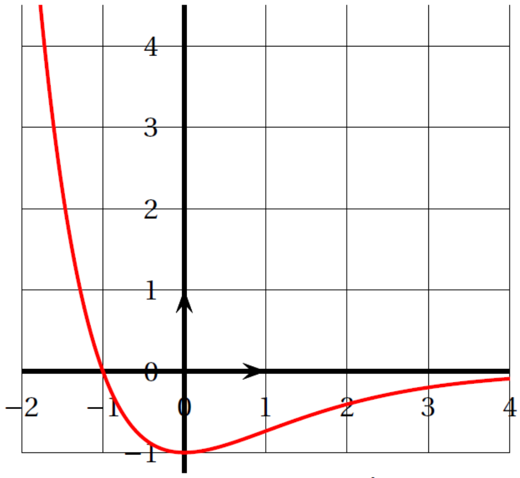
Partie A

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction dérivée f' d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Partie B

On admet que la fonction f mentionnée dans la partie A est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)e^{-x}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

On admettra que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Interpréter le résultat précédent en terme d'asymptote.

2. a. Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x)=(-x-1)e^{-x}$.

b. Dresser le tableau complet de variations de la fonction f.

3. a. Démontrer que l'équation $f(x)=-3$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

b. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

4. Étudier la convexité de la fonction f. Vous préciserez les éventuels points d'inflexion et leurs coordonnées.

5. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

b. Démontrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant -2e^{-1}x+5e^{-1}$.

Exercice 2 **6 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers.
Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

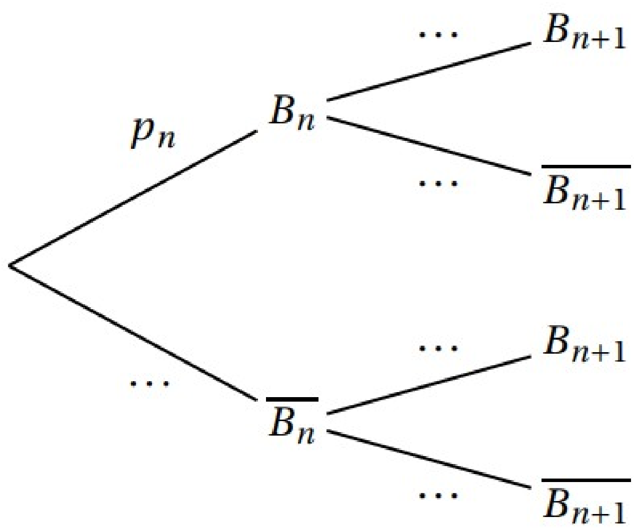
Partie A

On estime que :

- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,9$;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel. On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n .
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0=1$.

1. a. Donner p_1 et montrer que $p_2=0,85$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
b. Sachant que la trottinette était en bon état la deuxième semaine, déterminer la probabilité qu'elle était aussi en bon état la première semaine. Vous arrondirez votre résultat à 10^{-3} près.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n , $p_{n+1}=0,5\,p_n+0,4$.
4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $p_n \geqslant 0,8$.
b. À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?
5. a. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=p_n-0,8$.
Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
b. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n .
c. En déduire la limite de la suite (p_n) .

Partie B

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

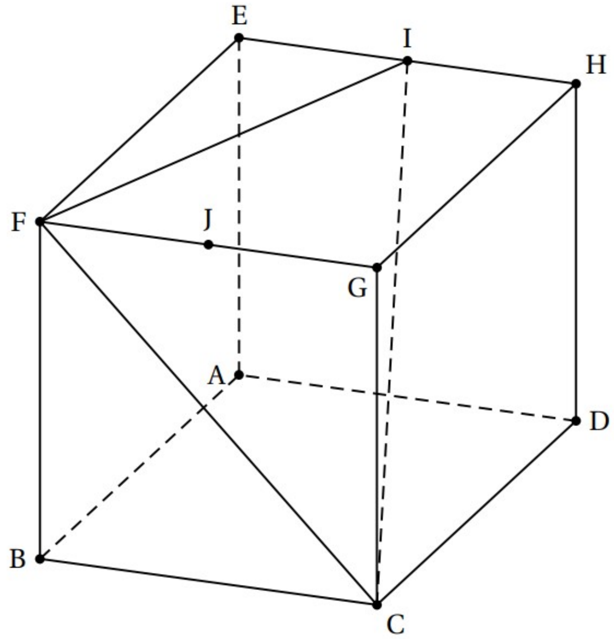
- l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres ;
- la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à $0,8$.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état.
Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état. Vous arrondirez votre résultat à 10^{-3} près.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X . Interpréter le résultat.

Exercice 3 **5 points**

On considère le cube ABCDEFGH .
On note I le milieu du segment $[EH]$ et on considère le triangle CFI .
L'espace est muni du repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ et on admet que le point I a pour coordonnées $\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ dans ce repère.



1. a. Donner, sans justifier, les coordonnées des points C , F et G .

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (CFI) .

c. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (CFI) est : $x+2y+2z-3=0$.

2. On note d la droite passant par G et orthogonale au plan (CFI) .

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .

b. Démontrer que le point $K\left(\frac{7}{9};\frac{5}{9};\frac{5}{9}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (CFI) .

c. Déduire des questions précédentes que la distance du point G au plan (CFI) est égale à $\frac{2}{3}$.

3. On considère la pyramide GCFI .
On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule :

$$V=\frac{1}{3}\times b\times h$$

où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

a. Démontrer que le volume de la pyramide GCFI est égale à $\frac{1}{6}$, exprimé en unité de volume.

b. En déduire l'aire du triangle CFI , en unité d'aire.

Exercice 4 **4 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

Affirmation 1 : La suite (u_n) n'a pas de limite.

2. On considère (v_n) une suite réelle telle que, pour tout entier naturel n , on a $n<v_n<n+1$.

Affirmation 2 : La suite (v_n) est monotone.

3. Pour participer à un jeu, un joueur doit payer 4€.
Il lance ensuite un dé équilibré à six faces :

- s'il obtient 1, il remporte 12€ ;
- s'il obtient un nombre pair, il remporte 3€ ;
- sinon il ne remporte rien.

Affirmation 3 : Sur un grand nombre de parties, le joueur perd en moyenne $0{,}50$ € par partie.

4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les droites d et d' de représentations paramétriques suivantes :

$$d:\begin{cases}x=1+4t\\ y=2+4t,\quad t\in\mathbb{R}\\ z=1-6t\end{cases}\qquad \text{et} \qquad d':\begin{cases}x=15+k\\ y=8-k,\quad k\in\mathbb{R}\\ z=-6+2k\end{cases}$$

Affirmation 4 : Les droites d et d' sont sécantes.