CORRIGE
BACCALAURÉAT BLANC

ÉPREUVE DU JEUDI 13 FÉVRIER 2025

MATHÉMATIQUES
- SPÉCIALITÉ -

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter les quatre exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **5 points**

Partie A

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction dérivée f' d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. **(0,25 point)**

Une fonction f est croissante (respectivement décroissante) si et seulement si sa dérivée première est positive (respectivement négative).

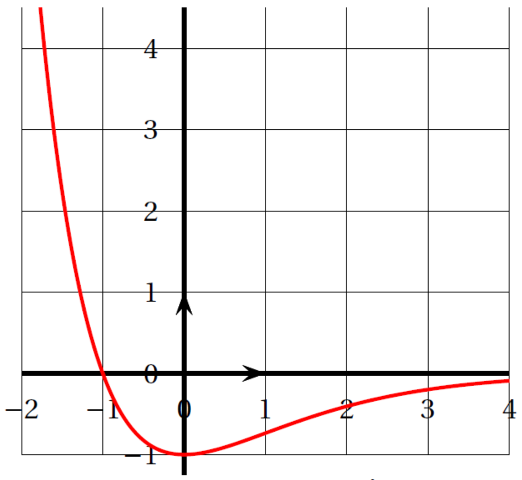
D'après le graphique ci-dessous, la dérivée f' est positive sur $]-\infty;-1]$ et positive sur $[1;+\infty[$.

Ainsi, la fonction f est croissante sur $]-\infty;-1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$.

2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$. **(0,25 point)**

Une fonction f est convexe (respectivement concave) si et seulement si sa dérivée première est croissante (respectivement décroissante).

D'après le graphique ci-dessous, la dérivée f' est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$. Ainsi, la fonction f est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Partie B

On admet que la fonction f mentionnée dans la partie A est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)e^{-x}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

On admettra que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. **(0,5 point)**

Pour la limite en $+\infty$, on est en présence d'une FI du type « $0\times+\infty$ ».

On a $f(x)=\dfrac{x+2}{e^x}=\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{2}{e^x}$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$. D'où, par inverse, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$.

De plus, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$. Ainsi, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

b. Interpréter le résultat précédent en terme d'asymptote. **(0,25 point)**

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$.

2. a. Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x)=(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$. **(0,5 point)**

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de telles fonctions.

Elle est de la forme uv avec : $u(x)=x+2$ et $u'(x)=1$

$v(x)=\mathrm{e}^{-x}$ et $v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$

Pour tour réel x, $f'(x)=1\times\mathrm{e}^{-x}-(x+2)\mathrm{e}^{-x}=(1-(x+2))\mathrm{e}^{-x}=(1-x-2)\mathrm{e}^{-x}=(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Dresser le tableau complet de variations de la fonction f. **(0,5 point)**

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x}>0$. Donc le signe de f' ne dépend que de celui de $(-x-1)$.

Or $-x-1=0 \Leftrightarrow -x=1 \Leftrightarrow x=-1$.

On en déduit alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

On a $f(-1)=(-1+2)\times\mathrm{e}^{-(-1)}=\mathrm{e}^{1}=\mathrm{e}$.

Ce tableau confirme les premières hypothèses sur les variations énoncées à la partie A.

3. a. Démontrer que l'équation $f(x)=-3$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. **(0,75 point)**

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

• Sur l'intervalle $[-1;+\infty[$

La fonction f est minorée par 0 car elle est strictement décroissante et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Donc l'équation $f(x)=-3$ ne possède aucune solution.

• Sur l'intervalle $]-\infty;-1]$

La fonction f est strictement croissante.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $f(-1)=\mathrm{e}\approx 2,178$. Or $-3\in]-\infty;\mathrm{e}]$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=-3$ admet une unique solution.

Ainsi, l'équation $f(x)=-3$ admet une unique solution, notée α, sur $\mathbb{R}$.

b. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près. **(0,25 point)**

D'après la calculatrice, on a $-3<\alpha<-2$, puis $-2,4<\alpha<-2,3$ et $-2,31<\alpha<-2,30$.

Or l'image de $-2,30$ est la plus proche de -3. Ainsi $\alpha\approx-2,30$.

4. Étudier la convexité de la fonction f. Vous préciserez les éventuels points d'inflexion et leurs coordonnées. **(0,75 point)**

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de telles fonctions.

Elle est de la forme uv avec : $u(x)=-x-1$ et $u'(x)=-1$

$v(x)=\mathrm{e}^{-x}$ et $v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$

Pour tour réel x, $f''(x)=-1\times\mathrm{e}^{-x}-(-x-1)\mathrm{e}^{-x}=(-1-(-x-1))\mathrm{e}^{-x}=(-1+x+1)\mathrm{e}^{-x}=xe^{-x}$.

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x}>0$. Donc le signe de f'' ne dépend que de celui de x qui s'annule en 0.

On en déduit alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de f''		$-$	0	$+$	
Convexité		concave	point d'inflexion	convexe	

La fonction f est donc concave sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et concave sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

De plus, on a $f(0)=(0+2)\times\mathrm{e}^{-0}=2\times1=2$ et donc la courbe représentative de la fonction f possède un point d'inflexion de coordonnées $(0;2)$.

Ce tableau confirme les secondes hypothèses sur la convexité énoncées à la partie A.

5. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1. **(0,75 point)**

On a $\mathrm{T}: y=f'(a)(x-a)+f(a)$ avec $a=1$.

Or $f'(1)=((-1-1)\mathrm{e})^{-1}=-2\,\mathrm{e}^{-1}$ et $f(1)=(1+2)\mathrm{e}^{-1}=3\,\mathrm{e}^{-1}$.

D'où $\mathrm{T}: y=f'(1)(x-1)+f(1)=-2\,\mathrm{e}^{-1}(x-1)+3\,\mathrm{e}^{-1}=-2\,\mathrm{e}^{-1}x+2\,\mathrm{e}^{-x}+3\,\mathrm{e}^{-1}=-2\,\mathrm{e}^{-x}x+5\,\mathrm{e}^{-1}$.

Ainsi l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point 1 est $\mathrm{T}: y=-2\mathrm{e}^{-1}x+5\,\mathrm{e}^{-1}$.

b. Démontrer que, pour tout réel $x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant -2\,\mathrm{e}^{-1}x+5\,\mathrm{e}^{-1}$. **(0,25 point)**

La fonction f est convexe sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Ceci signifie que la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de toutes ses tangentes. En particulier, elle est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1. Ainsi, pour tout réel $x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant -2\,\mathrm{e}^{-1}x+5\,\mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 2 **6 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

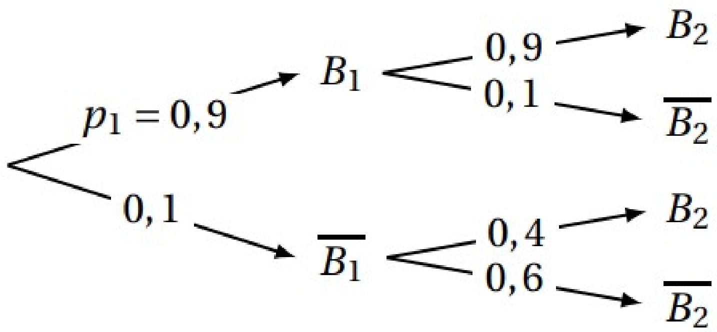
Partie A

On estime que :

- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,9$;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel. On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n .
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0=1$.

1. a. Donner p_1 et montrer que $p_2=0,85$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré. **(0,5 point)**
Comme la trottinette était en bon état lors de sa mise en service, on en déduit qu'elle reste en bon état semaine suivante, à savoir la première, avec une probabilité de $0,9$. Donc $p_1=0,9$.
Pour déterminer p_2 , on va dresser un arbre pondéré liant ce qui se passe entre la première et la deuxième semaine. En utilisant les données de l'énoncé, on obtient l'arbre suivant :



Or selon les notations utilisées, $p_1=P(B_1)$ et $p_2=P(B_2)$.
D'après la formule des probabilités totales, on a :
$P(B_2)=P(B_1\cap B_2)+P(\overline{B_1}\cap B_2)=0,9\times 0,9+0,1\times 0,4=0,81+0,04=0,85$.
Ainsi on obtient bien que $p_2=0,85$.

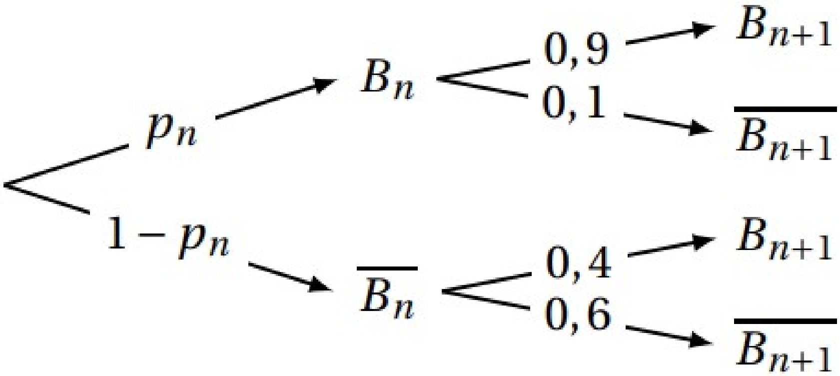
b. Sachant que la trottinette était en bon état la deuxième semaine, déterminer la probabilité qu'elle était aussi en bon état la première semaine. Vous arrondirez votre résultat à 10^{-3} près. **(0,5 point)**

On cherche la probabilité de $P_{B_2}(B_1)$.

On a $P_{B_2}(B_1)=\dfrac{P(B_1\cap B_2)}{P(B_2)}=\dfrac{0,9\times 0,9}{0,85}=\dfrac{0,81}{0,85}\approx 0,953$.

Ainsi la probabilité que la trottinette était en bon état la première semaine sachant qu'elle l'était en deuxième semaine est environ $0,953$, soit environ $95,3$ %.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous : **(0,5 point)**



3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1}=0,5\,p_n+0,4$. **(0,5 point)**

Selon les notations utilisées, $p_n=\mathrm{P}(\mathrm{B}_n)$ et $p_{n+1}=\mathrm{P}(\mathrm{B}_{n+1})$.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$\mathrm{P}(\mathrm{B}_{n+1})=\mathrm{P}(\mathrm{B}_n\cap \mathrm{B}_{n+1})+\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}_n}\cap \mathrm{B}_{n+1})=p_n\times 0,9+(1-p_n)\times 0,4=0,9\,p_n+0,4-0,4\,p_n=0,5\,p_n+0,4$.

Ainsi on obtient bien que $p_{n+1}=0,5\,p_n+0,4$.

4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n\geqslant 0,8$. **(01 point)**

Notons, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, la propriété P_n : « $p_n\geqslant 0,8$ ».

• Initialisation : $n=0$

On a $p_0=1\geqslant 0,8$. Donc P_0 est vraie.

• Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ (fixé) tel que P_n est vraie. Montrons alors que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $p_{n+1}\geqslant 0,8$.

$$\begin{aligned} p_n\geqslant 0,8 &\Leftrightarrow 0,5\,p_n\geqslant 0,4\\ &\Leftrightarrow 0,5\,p_n+0,4\geqslant 0,8\\ &\Leftrightarrow p_{n+1}\geqslant 0,8 \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

• Conclusion : la propriété P_n est vraie au rang $n=0$ et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout n. Ainsi, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $p_n\geqslant 0,8$.

b. À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ? **(0,25 point)**

D'après la question précédente, on a démontré que la suite (p_n) est minorée par $0,8$. Ainsi, l'entreprise peut mettre en avant le fait que, d'après les calculs effectués, la fiabilité de son parc est importante car au moins 80% de ses trottinettes sont toujours en bon état, quelle que soit la semaine.

5. a. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=p_n-0,8$.

Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. **(0,5 point)**

On va démontrer que $u_{n+1}=qu_n$.

$$\begin{aligned} \text{On a }\ u_{n+1}&=p_{n+1}-0,8\\ &=0,5\,p_n+0,4-0,8\\ &=0,5\,p_n-0,4=0,5\left(p_n-\frac{0,4}{0,5}\right)\\ &=0,5(p_n-0,8)\\ &=0,5\,u_n \end{aligned}$$

De plus, $u_0=p_0-0,8=1-0,8=0,2$.

Ainsi la suite (u_n) est géométrique de raison $q=0,5$ et de premier terme $u_0=0,2$.

b. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n . **(0,5 point)**
Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n = 0{,}2 \times 0{,}5^n$.
Or $u_n = p_n - 0{,}8 \Leftrightarrow p_n = u_n + 0{,}8$. Ainsi, pour tout entier naturel n , $p_n = 0{,}2 \times 0{,}5^n + 0{,}8$.
c. En déduire la limite de la suite (p_n) . **(0,5 point)**
Comme $-1 < 0{,}5 < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$. Ainsi, par produit et somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}8$.
Ainsi, la probabilité que la trottinette soit en bon état n semaines après sa mise en service tend vers $0{,}8$, soit 80%.

Partie B

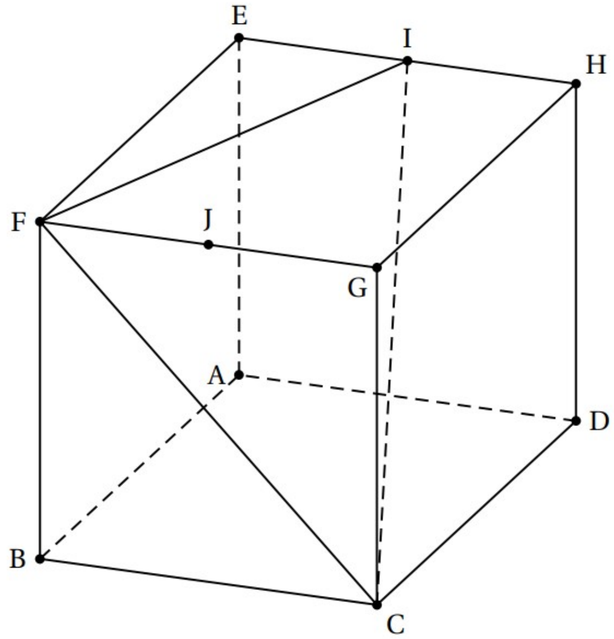
Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :
- l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres ;
- la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à $0{,}8$.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état.
Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X et préciser les paramètres de cette loi.
(0,25 point)
On a une épreuve de Bernoulli car il y a deux issues possibles dont le succès est S : « la trottinette choisie est en bon état » de probabilité $p = 0{,}8$. On répète 15 fois de manière identique et indépendante cette épreuve de Bernoulli. On est donc en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}8$. Ainsi X suit une loi binomiale telle que $X \sim B(15 ; 0{,}8)$.
2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état. Vous arrondirez votre résultat à 10^{-3} près. **(0,5 point)**
On cherche la probabilité de l'événement $X = 15$.
On a $P(X=15) = \binom{15}{15} \times 0{,}8^{15} \times (1-0{,}8)^{15-15} = 1 \times 0{,}8^{15} \times 0{,}2^0 = 0{,}8^{15} \approx 0{,}035$.
Ainsi la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état est $0{,}8^{15}$, soit environ $3{,}5$ %.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X . Interpréter le résultat. **(0,5 point)**
On a $E(X) = np = 15 \times 0{,}8 = 12$. Ainsi cela signifie que si l'on répète un très grand nombre de fois cette expérience, on obtient en moyenne 12 trottinettes en bon état sur un lot de 15.

Exercice 3 **5 points**

On considère le cube ABCDEFGH .
On note I le milieu du segment $[EH]$ et on considère le triangle CFI .
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$ et on admet que le point I a pour coordonnées $\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ dans ce repère.



1. a. Donner, sans justifier, les coordonnées des points C , F et G . **(0,5 point)**
On a $C(1;1;0)$, $F(1;0;1)$ et $G(1;1;1)$.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (CFI). **(0,75 point)**

Un vecteur est normal à un plan s'il est normal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.
Démontrons alors que $\vec{n}$ est normal aux vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CI}$ (qui ne sont pas colinéaires car les droites (CF) et (CI) sont sécantes en C).

On a $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. De plus, on a $I\left(0;\frac{1}{2};1\right)$. D'où $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$.

Alors $\vec{n}\cdot\overrightarrow{CF}=1\times0+2\times(-1)+2\times1=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{CI}=1\times(-1)+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2\times1=0$.

Donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CI}$. Ainsi $\vec{n}$ est normal au plan (CFI).

c. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (CFI) est : $x+2y+2z-3=0$. **(0,75 point)**

Soit $M(x;y;z)$ un point du plan (CFI). On a $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

$M\in(CFI)\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow1\times(x-1)+2\times(y-1)+2\times z=0\Leftrightarrow x+2y+2z-3=0$.
Ainsi une équation cartésienne du plan (CFI) est $x+2y+2z-3=0$.

Remarque
On peut aussi utiliser le fait qu'un vecteur normal à un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ a pour coordonnées $(a;b;c)$.

D'où une équation cartésienne de (CFI) est $x+2y+2z+d=0$.
Or le point C appartient à ce plan, donc ses coordonnées vérifient l'équation.
Comme $\text{C}(1;1;0)$, alors $1+2\times1+2\times0+d=0$, c'est-à-dire $d=-3$.
Ainsi on trouve comme équation cartésienne pour (CFI) : $x+2y+2z-3=0$.

2. On note d la droite passant par G et orthogonale au plan (CFI).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d. **(0,5 point)**

La droite d est orthogonale au plan (CFI), donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de cette droite.
De plus, cette droite passe par le point $\text{G}(1;1;1)$.

Ainsi $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=1+2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

b. Démontrer que le point $\text{K}\left(\frac{7}{9};\frac{5}{9};\frac{5}{9}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (CFI).

(1 point)

Pour trouver les coordonnées du point K, projeté orthogonal de G sur le plan (CFI), on résout le système suivant :

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=1+2t \\ x+2y+2z-3=0 \end{cases}$$

On remplace alors x, y et z par leurs expressions respectives dans l'équation cartésienne.

On a $1+t+2(1+2t)+2(1+2t)-3=0 \Leftrightarrow 9t+2=0 \Leftrightarrow 9t=-2 \Leftrightarrow t=-\frac{2}{9}$.

Le projeté orthogonal K du point G sur (CFI) est donc le point de la droite d de paramètre $t=-\frac{2}{9}$. Il suffit donc de remplacer t par $-\frac{2}{9}$ dans la représentation paramétrique de d.

On obtient $\begin{cases} x=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9} \\ y=1+2\times\left(-\frac{2}{9}\right)=\frac{5}{9} \\ z=1+2\times\left(-\frac{2}{9}\right)=\frac{5}{9} \end{cases}$. Ainsi le point K a bien pour coordonnées $\left(\frac{7}{9};\frac{5}{9};\frac{5}{9}\right)$.

c. Déduire des questions précédentes que la distance du point G au plan (CFI) est égale à $\frac{2}{3}$.

(0,5 point)

La distance du point K au plan (CFI) est la pus courte distance entre le point et le plan, à savoir la distance KG. On a $\overrightarrow{\text{KG}}\begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$. D'où $\text{KG}=\sqrt{\left(\frac{2}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{81}+\frac{16}{81}+\frac{16}{81}}=\sqrt{\frac{36}{81}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

3. On considère la pyramide GCFI.
On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule :

$$\text{V}=\frac{1}{3}\times b\times h$$

où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

a. Démontrer que le volume de la pyramide GCFI est égale à $\frac{1}{6}$, exprimé en unité de volume.

(0,5 point)

Pour déterminer le volume de cette pyramide, il est nécessaire de fixer un sommet pour identifier la hauteur à associer. Si nous prenons le sommet G, la base sera le triangle CFI et la hauteur sera KG, car K est le projeté orthogonal de G sur le plan (CFI). Cependant, nous ne connaissons pas l'aire du triangle CFI, qui de plus, est demandé à la question suivante. Il est donc nécessaire de prendre un autre sommet.

Si nous choisissons le sommet I, la base sera le triangle GFC rectangle en G et la hauteur sera IJ par projection orthogonale.

La hauteur IJ étant égale à une arête, on a $\mathrm{IJ}=h=1$.

De plus, $\mathrm{A_{GFC}}=\frac{\mathrm{GF}\times\mathrm{GC}}{2}=\frac{1\times1}{2}=\frac{1}{2}$. D'où $\mathrm{V}=\frac{1}{3}\times\mathrm{IJ}\times\mathrm{A_{GFC}}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

Ainsi le volume de la pyramide GCFI mesure $\frac{1}{6}$ d'unité de volume.

b. En déduire l'aire du triangle CFI, en unité d'aire. **(0,5 point)**

Pour déterminer l'aire du triangle CFI, il est maintenant nécessaire de revenir au volume de la pyramide GCFI en prenant comme sommet G, comme base le triangle CFI et hauteur GK.

On a alors $\mathrm{V}=\frac{1}{3}\times\mathrm{A_{CFI}}\times\mathrm{GK}$, d'où $\mathrm{A_{CFI}}=\frac{3\,\mathrm{V}}{\mathrm{GK}}$.

Or, d'après les questions précédentes, on a $\mathrm{GK}=\frac{2}{3}$ et $\mathrm{V}=\frac{1}{6}$.

D'où $\mathrm{A_{CFI}}=\frac{3\times\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$. Ainsi la surface du triangle CFI mesure $\frac{3}{4}$ d'unité d'aire.

Exercice 4 **4 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Affirmation 1 : La suite (u_n) n'a pas de limite. **(1 point)**

Pour tout entier naturel n , $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{(-1)^n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
Or, par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Donc d'après le théorème d'encadrement, la suite (u_n) converge vers 0.
Ainsi l'affirmation 1 est fausse.

2. On considère (v_n) une suite réelle telle que, pour tout entier naturel n , on a $n < v_n < n+1$.

Affirmation 2 : La suite (v_n) est monotone. **(1 point)**

La suite (v_n) diverge vers $+\infty$ par comparaison car $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.
Si cette suite est monotone, alors elle est nécessairement croissante.
On cherche donc à savoir si, à partir d'un certain rang n , $v_n \leqslant v_{n+1}$.
Or, pour tout entier naturel n , $n < v_n < n+1$. Par conséquence, $n+1 < v_{n+1} < n+2$.
Il vient par transitivité que, pour tout entier naturel n , $n < v_n < n+1 < v_{n+1} < n+2$.
On a alors démontré que pour tout entier naturel n , $v_n < v_{n+1}$, et donc que la suite est monotone car croissante.
Ainsi l'affirmation 2 est vraie.

3. Pour participer à un jeu, un joueur doit payer 4€.
Il lance ensuite un dé équilibré à six faces :
- s'il obtient 1, il remporte 12€ ;
- s'il obtient un nombre pair, il remporte 3€ ;
- sinon il ne remporte rien.

Affirmation 3 : Sur un grand nombre de parties, le joueur perd en moyenne $0{,}50$ € par partie.
(1 point)

Notons X la variable aléatoire associé au gain du joueur. Sachant que le joueur dépense au départ 4€, X prend les valeurs : 8 ; -1 ; -4 . On obtient alors la loi de probabilité de X :

$\boldsymbol{x_i}$	-4	-1	8
$\mathbf{P}(\mathbf{X} = \boldsymbol{x_i})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

On peut alors calculer l'espérance de la variable aléatoire X .

On a $E(X)=\sum_{i=1}^{3} p_i x_i=-4\times\frac{1}{3}-1\times\frac{1}{2}+8\times\frac{1}{6}=-\frac{4}{3}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}=-\frac{1}{2}=-0,5$.

Donc le joueur perd en moyenne $0,50$ € par partie.

Ainsi l'affirmation 3 est vraie.

4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les droites d et d' de représentations paramétriques suivantes :

$$d:\begin{cases} x=1+4t \\ y=2+4t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1-6t \end{cases} \qquad \text{et} \qquad d':\begin{cases} x=15+k \\ y=8-k, \quad k\in\mathbb{R} \\ z=-6+2k \end{cases}$$

Affirmation 4 : Les droites d et d' sont sécantes. **(1 point)**

Les vecteurs $\vec{u}(4;4;-6)$ et $\vec{v}(1;-1;2)$ sont respectivement des vecteurs directeurs de d et d' .
Or ils ne sont pas colinéaires, donc les droites d et d' ne sont pas pas parallèles.
Elles sont donc soit sécantes, soit non coplanaires. Pour le savoir, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} 1+4t=15+k \\ 2+4t=8-k \\ 1-6t=-6+2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4t=15+6-4t \\ k=6-4t \\ 1-6t=-6+2(6-4t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8t=20 \\ k=6-4t \\ 2t=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{20}{8}=\frac{5}{2} \\ k=6-4\times\frac{5}{2}=-4 \\ t=\frac{5}{2} \end{cases}$$

Ce système possède une unique solution. Cela signifie que les droites d et d' sont sécantes.
Ainsi l'affirmation 4 est vraie.