

CORRIGE BACCALAURÉAT BLANC

ÉPREUVE DU JEUDI 19 FÉVRIER 2026

**MATHÉMATIQUES
- SPÉCIALITÉ -**

Durée de l'épreuve : 4 heures

**L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans
mode examen, est autorisé.**

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

5 points

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.

Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

- si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac ;
- si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

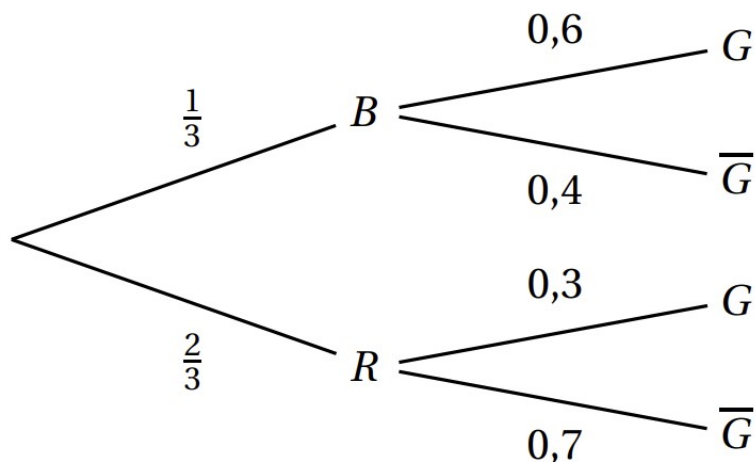
1. Un joueur fait une partie et on note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».

a. Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(G)$. (0,25 point)

On cherche ici la probabilité de gagner sachant que la case obtenue est blanche. Le joueur extrait donc un jeton du sac. Il a trois chances sur 5 de gagner. Ainsi $P_B(G) = \frac{3}{5} = 0,6$.

b. On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à 0,3.

Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant : (0,5 point)



2. a. Montrer que $P(G) = 0,4$. (0,75 point)

On cherche la probabilité de l'évènement G .

D'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(G) = P(B \cap G) + P(R \cap G) = P(B) \times P_B(G) + P(R) \times P_R(G) = \frac{1}{3} \times 0,6 + \frac{2}{3} \times 0,3 = 0,2 + 0,2 = 0,4.$$

Ainsi la probabilité que le joueur gagne la partie est 0,4, soit 40%.

b. Un joueur gagne la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ? (0,5 point)

On cherche la probabilité $P_G(B)$. On a $P_G(B) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{0,2}{0,4} = \frac{1}{2} = 0,5$.

La probabilité que le joueur ait obtenu une case blanche en lançant la roue sachant qu'il gagne la partie est 0,5, soit 50%.

3. Les événements B et G sont-ils indépendants ? Justifier. **(0,25 point)**

Les événements B et G sont indépendants si $P(B \cap G) = P(B) \times P(G)$.

$$\text{Or } P(B \cap G) = 0,2 = \frac{1}{5} \text{ et } P(B) \times P(G) = \frac{1}{3} \times 0,4 = \frac{0,4}{3} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}.$$

Ainsi, comme $P(B \cap G) \neq P(B) \times P(G)$, les événements B et G ne sont pas indépendants.

Remarque

On peut aussi démontrer que $P_B(G) \neq P(G)$. En effet $P_B(G) = 0,6$ alors que $P(G) = 0,4$.

4. Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

a. Donner, sans justification, la loi suivie par X et préciser ses paramètres. **(0,5 point)**

X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,4$: $X \sim B(10; 0,4)$.

b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées. **(0,5 point)**

On cherche $P(X=3)$. $P(X=3) = \binom{10}{3} \times 0,4^3 \times (1-0,4)^{10-3} \approx 0,215$. Ainsi il y a une probabilité d'environ 0,215 que le joueur ait gagné exactement trois parties sur les dix.

c. Calculer $P(X \geq 4)$ arrondie à 10^{-3} près. Donner une interprétation du résultat obtenu.

(0,5 point)

D'après la calculatrice, $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0,618$.

Ainsi il y a environ 61,8 % de chance que le joueur gagne au moins quatre parties sur les dix.

d. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat. **(0,5 point)**

On a $E(X) = np = 10 \times 0,4 = 4$. Ainsi, si on répète un très grand nombre de fois l'expérience, le nombre moyen de parties gagnées est de quatre sur les dix.

5. Un joueur fait n parties et on note p_n la probabilité de l'événement « le joueur gagne au moins une partie ».

a. Montrer que $p_n = 1 - 0,6^n$. **(0,5 point)**

On reprend la variable aléatoire X précédente, mais cette fois avec n candidats. X suit alors la loi binomiale de paramètres n et $p=0,4$.

Le joueur gagne au moins une partie correspond à l'événement $p_n = P(X \geq 1)$.

$$p_n = P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,4^0 \times (1-0,4)^{n-0} = 1 - 1 \times 1 \times 0,6^n = 1 - 0,6^n.$$

Ainsi $p_n = 1 - 0,6^n$.

Ainsi la probabilité que le joueur gagne au moins une partie est $p_n = 1 - 0,6^n$.

b. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à 0,99. Aucune justification n'est attendue. **(0,25 point)**

Résolution à la calculatrice :

On utilise le mode « suites » ou on crée un algorithme. On obtient $n=10$.

Résolution algébrique :

On cherche n tel que $p_n \geq 0,99$. On résout alors une inéquation logarithmique.

$$\text{On a } 1 - 0,6^n \geq 0,99 \Leftrightarrow -0,6^n \geq -0,01$$

$$\Leftrightarrow 0,6^n \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,6^n) \leq \ln(0,01) \text{ car } x \mapsto \ln(x) \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+*}$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,6) \leq \ln(0,01)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} \text{ car } \ln(0,6) < 0$$

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} \approx 9,02$. D'où $n \geq 10$. Ainsi, il faut jouer au moins dix parties pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 2**5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(-1; -3; 2), B(3; -2; 6) \text{ et } C(1; 2; -4)$$

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera P. (0,5 point)

Trois points A, B et C forment un plan si et seulement s'ils ne sont pas alignés. Or ces points ne

le sont pas si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires. On a $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Leurs coordonnées n'étant pas proportionnelles, ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Ainsi les points A, B et C forment un plan noté P.

2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix}$ est normal au plan P. (0,75 point)

Un vecteur est normal à un plan s'il est normal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Démontrons alors que $\vec{n}$ est normal aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ (qui ne sont pas colinéaires d'après la question précédente).

On a $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$$\text{D'où } \vec{n} \cdot \vec{AB} = 13 \times 4 - 16 \times 1 - 9 \times 4 = 52 - 16 - 36 = 0.$$

$$\text{Et } \vec{n} \cdot \vec{AC} = 13 \times 2 - 16 \times 5 - 9 \times (-6) = 26 - 80 + 54 = 0.$$

Donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. Ainsi $\vec{n}$ est normal au plan P.

b. En déduire une équation cartésienne du plan P. (0,75 point)

Soit $M(x; y; z)$ un point du plan P. On a $\vec{AM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y+3 \\ z-2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix}$.

$$M \in P \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{AM}$$

$$\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$$

$$\Leftrightarrow 13 \times (x+1) - 16 \times (y+3) - 9 \times (z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 13x + 13 - 16y - 48 - 9z + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow 13x - 16y - 9z - 17 = 0$$

Ainsi une équation cartésienne du plan P est $13x - 16y - 9z - 17 = 0$.

Remarque

On peut aussi utiliser le fait qu'un vecteur normal à un plan d'équation cartésienne

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ a pour coordonnées } (a; b; c).$$

D'où une équation cartésienne de P est $13x - 16y - 9z + d = 0$.

Or le point A appartient à ce plan, donc ses coordonnées vérifient l'équation.

$$\text{Comme } A(-1; -3; 2), \text{ alors } 13 \times (-1) - 16 \times (-3) - 9 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow -13 + 48 - 18 + d = 0 \\ \Leftrightarrow d = -17$$

Ainsi on trouve comme équation cartésienne pour P : $13x - 16y - 9z - 17 = 0$.

On note D la droite passant par le point $F(15; -16; -8)$ et orthogonale au plan P.

3. Donner une représentation paramétrique de la droite D. (0,5 point)

La droite D est orthogonale au plan P, donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de cette droite.

De plus, cette droite passe par le point $F(15; -16; -8)$.

Ainsi D :
$$\begin{cases} x=15+13t \\ y=-16-16t \\ z=-8-9t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4. On appelle E le point d'intersection de la droite D et du plan P. **(1 point)**

Déterminer les coordonnées du point E.

Pour trouver les coordonnées du point E, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} x=15+13t \\ y=-16-16t \\ z=-8-9t \\ 13x-16y-9z-17=0 \end{cases}$$

On remplace alors x , y et z par leurs expressions respectives dans l'équation cartésienne.

On a

$$\begin{aligned} 13(15+13t)-16(-16-16t)+-9(-8-9t)-17 &= 0 \Leftrightarrow 195+169t+256+256t+72+81t-17=0 \\ &\Leftrightarrow 506t+506=0 \\ &\Leftrightarrow 506t=-506 \\ &\Leftrightarrow t=-1 \end{aligned}$$

Le point d'intersection entre la droite D et le plan P est donc le point de la droite D de paramètre $t=-1$. Il suffit donc de remplacer t par -1 dans la représentation paramétrique de D.

On obtient
$$\begin{cases} x=15+13 \times (-1)=15-13=2 \\ y=-16-16 \times (-1)=16+16=32 \\ z=-8-9 \times (-1)=-8+9=1 \end{cases}$$
. Ainsi le point E a pour coordonnées $(2; 32; 1)$.

5. Déterminer la valeur exacte de la distance du point F au plan P. **(0,75 point)**

Le point E correspond au projeté orthogonal du point F sur le plan P. Donc la distance recherchée est la longueur FE.

On a $\overrightarrow{FE} \begin{pmatrix} -13 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix}$. D'où $FE = \sqrt{(-13)^2 + 16^2 + 9^2} = \sqrt{169 + 256 + 81} = \sqrt{506}$.

Ainsi la distance du point F au plan P est $FE = \sqrt{506}$ unités de longueur.

6. Déterminer les coordonnées du ou des point(s) de la droite D dont la distance au plan P est égale à la moitié de la distance du point F au plan P. **(0,75 point)**

Nous avons deux points correspondant à cette condition. Le premier correspond au milieu du segment [FE]. Nous le noterons M_1 . Le second correspond au milieu du segment [F'E], où F' est le symétrique du point F par rapport au point E. Nous le noterons M_2 .

Soit $M_1(x_{M_1}; y_{M_1}; z_{M_1})$. On a $F(15; -16; -8)$ et $E(2; 32; 1)$.

D'où $x_{M_1} = x_F + x_E = \frac{15+2}{2} = \frac{17}{2}$, $y_{M_1} = y_F + y_E = \frac{-16+32}{2} = 8$ et

$z_{M_1} = z_F + z_E = \frac{-8+1}{2} = -\frac{7}{2}$. Ainsi $M_1\left(\frac{17}{2}; 8; -\frac{7}{2}\right)$.

Soit $M_2(x_{M_2}; y_{M_2}; z_{M_2})$. Par construction du point F', on obtient que $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EF'}$. D'où $\overrightarrow{EF'} \begin{pmatrix} -13 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Alors $\overrightarrow{EM_2} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EF'}$ et donc $\overrightarrow{EM_2} \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ 8 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$. De plus $\overrightarrow{EM_2} \begin{pmatrix} x_{M_2}-2 \\ y_{M_2} \\ z_{M_2}-1 \end{pmatrix}$.

$$\text{D'où } \begin{cases} x_{M_2} - 2 = -\frac{13}{2} \\ y_{M_2} = 8 \\ z_{M_2} - 1 = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M_2} = -\frac{13}{2} + 2 = -\frac{9}{2} \\ y_{M_2} = 8 \\ z_{M_2} = \frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2} \end{cases} . \text{ Ainsi } M_2\left(-\frac{9}{2}; 8; \frac{11}{2}\right) .$$

Exercice 3**6 points**

Les parties A et B ne sont pas indépendantes.

Partie A : Étude d'une fonctionOn considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x - e^{x-9}$.**1. a. Calculer la limite de f en $-\infty$. (0,5 point)**Par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-9) = -\infty$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Donc par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-9} = 0$.De plus, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x) = -\infty$. Ainsi, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.**b. En remarquant que $e^{x-9} = e^x e^{-9}$, calculer la limite de f en $+\infty$. (0,5 point)**On est en présence d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ». On va donc factoriser, en partie, l'expression de $f(x)$ par x .

On a $f(x) = 1 + x \left(1 - \frac{e^{x-9}}{x} \right) = 1 + x \left(1 - e^{-9} \frac{e^x}{x} \right)$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.D'où, par produit et somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - e^{-9} \frac{e^x}{x} \right) = -\infty$ (car $-e^{-9} < 0$). Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.Ainsi, par produit et somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.**2. a. Calculer la dérivée de la fonction f . (0,5 point)**La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de telles fonctions.Elle est de la forme $u+v$ avec : $u(x) = 1+x$ et $u'(x) = 1$

$$v(x) = -e^{x-9} \text{ et } v'(x) = -e^{x-9}$$

Pour tout réel x , $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 1 - e^{x-9}$.**b. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $1 - e^{x-9} \geq 0$ est l'intervalle $]-\infty; 9]$. (0,5 point)**

On a $1 - e^{x-9} \geq 0 \Leftrightarrow -e^{x-9} \geq -1 \Leftrightarrow e^{x-9} \leq 1 \Leftrightarrow e^{x-9} \leq e^0 \Leftrightarrow x-9 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 9$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation $1 - e^{x-9} \geq 0$ est l'intervalle $]-\infty; 9]$.**c. En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f . (0,5 point)**D'après la question précédente, on vient de résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$. Ceci signifie que la dérivée est positive sur l'intervalle $]-\infty; 9]$ et négative sur $[9; +\infty[$.

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	9	$+\infty$
signe de f'	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	9	$-\infty$

On a $f(9) = 1 + 9 - e^{9-9} = 1 + 9 - e^0 = 1 + 9 - 1 = 9$.

3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée α , sur l'intervalle $[9; +\infty[$. (0,75 point)La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[9; +\infty[$.De plus $f(9) = 9$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Or $1 \in]-\infty; 9]$.D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée α , sur l'intervalle $[9; +\infty[$.

b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-2} près. **(0,5 point)**
On a $11 < \alpha < 12$ puis $11,4 < \alpha < 11,5$ et $11,43 < \alpha < 11,44$.
Or l'image de 11,44 est plus proche de 1 que celle de 11,43. Ainsi $\alpha \approx 11,44$.

Partie B : Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie à la partie A.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 9$. **(0,75 point)**

Notons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 9$ ».

• Initialisation : $n=0$

On a $u_0 = 0$ et $u_1 = 1 + u_0 - e^{u_0-9} = 1 + 0 - e^{0-9} = 1 - e^{-9} \approx 1$. Or $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 9$. Donc P_0 est vraie.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé) tel que P_n est vraie. Montrons alors que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 9$.

On a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 9 \Leftrightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(9)$ car f est croissante sur $[-\infty; 9]$
 $\Leftrightarrow 1 - e^{-9} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 9$

Or $1 - e^{-9} \approx 1 > 0$. D'où, par transitivité, $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 9$.

Donc P_{n+1} est vraie.

• Conclusion : la propriété P_n est vraie au rang $n=0$ et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout n . Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 9$.

2. En déduire, en justifiant, que la suite (u_n) converge. On notera l sa limite. **(0,5 point)**

D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 9. Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers un réel l .

3. On admet que l est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer l . **(0,5 point)**

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est dérivable. De plus, elle est stable par $\mathbb{R}$ car l'ensemble image $]-\infty; 9]$ est inclus dans l'ensemble de définition $\mathbb{R}$.

D'après le théorème du point fixe, la limite l de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$.

$f(x) = x \Leftrightarrow 1 + x - e^{x-9} = x \Leftrightarrow -e^{x-9} = -1 \Leftrightarrow e^{x-9} = 1 \Leftrightarrow e^{x-9} = e^0 \Leftrightarrow x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 9$.

Ainsi la limite de la suite (u_n) est $l = 9$.

4. On souhaite déterminer la valeur de n à partir de laquelle tous les termes u_n seront strictement supérieurs à 8. Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous et préciser cette valeur. **(0,5 point)**

```
u = 0
n = 0
while u <= 8 :
    u = 1 + u - e**(u-9)
    n = n + 1
return n
```

Après avoir fait tourner l'algorithme ou en rentrant la suite dans la calculatrice, on trouve $n = 9$.

Exercice 4**4 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n, w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3.$$

Affirmation 1 : Pour tout entier naturel n , $w_n \geq n$.

Notons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n : « $w_n \geq n$ ».

• Initialisation : $n=0$

On a $w_0 = 0 \geq 0$. Donc P_0 est vraie.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé) tel que P_n est vraie. Montrons alors que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $w_{n+1} \geq n+1$.

$$\text{On a } w_n \geq n \Leftrightarrow 3w_n \geq 3n \Leftrightarrow 3w_n - 2n + 3 \geq n + 3 \Leftrightarrow w_{n+1} \geq n + 3.$$

Or, pour tout entier naturel n , $n+3 \geq n+1$. Par transitivité, il vient que $w_{n+1} \geq n+1$.

Donc P_{n+1} est vraie.

• Conclusion : la propriété P_n est vraie au rang $n=0$ et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n . Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \geq n$.

Affirmation vraie.

2. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{1+5^n}{2+3^n}$$

Affirmation 2 : La suite (u_n) converge vers $\frac{5}{3}$.

On est en présence d'une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise alors le numérateur par 5^n et le dénominateur par 3^n :

$$u_n = \frac{5^n \left(\frac{1}{5^n} + 1 \right)}{3^n \left(\frac{2}{3^n} + 1 \right)} = \left(\frac{5}{3} \right)^n \times \frac{\frac{1}{5^n} + 1}{\frac{2}{3^n} + 1}.$$

Comme $5 > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$. Par quotient et somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5^n} + 1 \right) = 1$.

Comme $3 > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$. Par quotient et somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3^n} + 1 \right) = 1$.

D'où, par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{5} \right)^n + 1}{\frac{2}{3^n} + 1} = 1$. De plus, comme $\frac{5}{3} > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{3} \right)^n = +\infty$.

Ainsi, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Affirmation fausse.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x-7)e^{-x}$.

Affirmation 3 : La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $\frac{1}{3}$ a

pour équation réduite $y = 9e^{-\frac{1}{3}}x + 9e^{-\frac{1}{3}}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de telles fonctions.

Elle est de la forme uv avec : $u(x) = 3x-7$ et $u'(x) = 3$

$$v(x) = e^{-x} \text{ et } v'(x) = -e^{-x}$$

Pour tout réel x , $f'(x) = 3e^{-x} - (3x-7)e^{-x} = (-3x+7+3)e^{-x} = (-3x+10)e^{-x}$.

L'équation de la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{3}$ a pour expression $T: y = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$.

$$\text{Or } f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(3 \times \frac{1}{3} - 7\right)e^{-\frac{1}{3}} = (1-7)e^{-\frac{1}{3}} = -6e^{-\frac{1}{3}}.$$

$$\text{Et } f'\left(\frac{1}{3}\right) = \left(-3 \times \frac{1}{3} + 10\right)e^{-\frac{1}{3}} = (-1+10)e^{-\frac{1}{3}} = 9e^{-\frac{1}{3}}.$$

$$\text{On a alors } T: y = 9e^{-\frac{1}{3}}\left(x - \frac{1}{3}\right) - 6e^{-\frac{1}{3}} = 9e^{-\frac{1}{3}}x - 3e^{-\frac{1}{3}} - 6e^{-\frac{1}{3}} = 9e^{-\frac{1}{3}}x - 9e^{-\frac{1}{3}}.$$

Affirmation fausse.

Affirmation 4 : La fonction f est convexe sur $\left]-\infty; \frac{13}{3}\right]$ et concave sur $\left[\frac{13}{3}; +\infty\right[$.

Pour trouver la convexité de la fonction f , on va trouver le signe de sa dérivée seconde.

La fonction f' est dérivable en tant que composée de telles fonctions.

Elle est de la forme uv avec : $u(x) = -3x+10$ et $u'(x) = -3$

$$v(x) = e^{-x} \text{ et } v'(x) = -e^{-x}$$

Pour tout réel x , $f''(x) = -3e^{-x} - (-3x+10)e^{-x} = (3x-10-3)e^{-x} = (3x-13)e^{-x}$.

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$. Donc le signe de f'' ne dépend que de celui de $3x-13$.

Or $3x-13=0 \Leftrightarrow 3x=13 \Leftrightarrow x=\frac{13}{3}$. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\frac{13}{3}$	$+\infty$
Signe de f''	$-$	0	$+$
convexité de f	concave		convexe

Ainsi, la fonction f est concave sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{13}{3}\right]$ puis convexe sur l'intervalle

$\left[\frac{13}{3}; +\infty\right[$. De plus, elle admet un point d'inflexion d'abscisse $\frac{13}{3}$.

Affirmation fausse.